

Name:

1	2	3	4	Σ

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

- 4 úlohy, 90 minut, max 30 bodů.
- Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).
- Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s pitím.
- Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).
- Číselné výsledky tvaru $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$ apod. není potřeba dále zjednodušovat.
- Tvzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.

-
1. (a) Zformulujte Mantelovu větu o grafech bez trojúhelníků.
(b) Dokažte ji.

[8 points]

2. (a) Definujte posloupnost Catalanových čísel $(c_i)_{i=0}^{\infty}$ pomocí rekurence.
 (b) Zformulujte explicitní vzorec pro n -té Catalanovo číslo.
 (c) Řekneme, že permutace čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ je *132-avoiding*, pokud neobsahuje trojici členů

$$(\dots, x, \dots, y, \dots, z, \dots) \quad \text{takovou, že } x < z < y$$

(tj. trojici, kde levé číslo je z trojice nejmenší a prostřední číslo je největší). Například 425631 není 132-avoiding (např. kvůli podtrženým členům), zatímco 435621 je 132-avoiding. Označme a_n počet 132-avoiding permutací čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ (klademe $(a_0, a_1, a_2) = (1, 1, 2)$).

- i. Pro $n = 4$ existuje 6 permutací, které začínají dvojkou. Vypište je všechny a zakroužkujte ty z nich, které jsou 132-avoiding.
- ii. Vyjádřete pomocí členů a_i počet X těch 132-avoiding permutací čísel $\{1, 2, \dots, 10\}$, které mají číslo 10 na páté pozici zleva. Pečlivě zdůvodněte.
- iii. Odvoďte rekurentní vztah pro a_n .
- iv. Určete a_5 .

[10 points]

3. (a) Dokažte, že kdykoliv jsou v rovině dány 4 body v obecné poloze (tj. žádné tři neleží na jedné přímce), pak některé tři z nich určují trojúhelník, který *není* ostroúhlý.
- (b) V rovině je dáno $n \geq 4$ bodů v obecné poloze. Ty určují $\binom{n}{3}$ trojúhelníků. Dokažte, že nejvýše 75% z těchto trojúhelníků je ostroúhlých. [7 points]

4. Uvažujme lineární $[n, k, d]$ -kód nad abecedou $\{0, 1\}$ s generující maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Určete hodnoty n, k .

(b) Určete hodnotu d .

[5 points]

Extra page 1/2 if you need it.

Extra page 2/2 if you need it.
