

MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2025–2026
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA D

LUBOŠ PICK

Příklad D1. Uvažujte funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} 2\sqrt{y}e^{-x}, & y \geq 0, \\ \frac{1}{2}\sin(2y), & y < 0. \end{cases}$$

- (a) Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, určete jejich definiční obory a načrtněte jejich grafy.
(b) Nalezněte všechna maximální řešení y splňující podmínku $y(0) = -\frac{3\pi}{4}$.

(10 bodů)

Příklad D2. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} 5y' - 2x' + 4y - x &= e^{-t} \\ y' + 8y - 3x &= 5e^{-t} \end{aligned}$$

pro diferencovatelné funkce x, y proměnné t .

- (a) Nalezněte všechna maximální řešení soustavy.
(b) Nalezněte všechna maximální řešení soustavy splňující podmínku $x(0) = 2, y(0) = 1$.
(c) Určete množinu všech $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pro která platí: tvoří-li dvojice funkcí x, y maximální řešení uvedené soustavy vyhovující podmínce $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, potom jsou funkce $x(t)$ a $y(t)$ omezené na intervalu $[0, \infty)$. **(10 bodů)**

Příklad D3. Dokažte, že vztahy

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(u + v) - u &= 0 \\ \sin(xy) + \operatorname{arctg}(uv) + v &= 0 \end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[u, v, x, y] = [0, 0, 0, \pi]$ diferencovatelné funkce u, v proměnných x, y takové, že $u(0, \pi) = 0$ a $v(0, \pi) = 0$. Necht' $h = [-\frac{1}{2}, 7e]$. Rozhodněte, zda existuje $D_h v(0, \pi)$ a pokud ano, spočtete ji. **(10 bodů)**

Příklad D4. Uvažujte funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x, y, z) = x - y + 2z$$

a množinu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 < 4\}.$$

Určete $\sup_M f$ a $\inf_M f$ a rozhodněte, zda funkce f těchto hodnot na množině M nabývá. **(10 bodů)**

Příklad D5. Označme ℓ^1 množinu všech posloupností reálných čísel $\{a_n\}$ takových, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení a buď je dokažte, nebo sestrojte protipříklad.

- (a) $\ell^1 \subset c_0$,
(b) ℓ^1 je separabilní v c_0 ,
(c) ℓ^1 je kompaktní v c_0 ,
(d) ℓ^1 je křivkově souvislá v c_0 . **(10 bodů)**

D1 Necht $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$(D1-1) \quad f(x, y) = \begin{cases} 2\sqrt{y} e^{-x}, & y \geq 0, \\ \frac{1}{2} \sin(2y), & y < 0. \end{cases}$$

(a) Naleznete všechna maxima'lní řešení' dif. rovnice

$$(D1-2) \quad y' = f(x, y),$$

uvážete jejich definičn' obory a načrtněte jejich grafy.

(b) Naleznete všechna max. řešení' rovnice (D1-2)

$$\text{splňující} \quad y(0) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Řešení' (a) Položíme

$$(D1-3) \quad h(x) = \begin{cases} e^{-x}, & y \geq 0, \\ 1, & y < 0, \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 2\sqrt{y}, & y \geq 0, \\ \frac{1}{2} \sin(2y), & y < 0. \end{cases}$$

Potom $f(x, y) = h(x)g(y)$, přičemž $h, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité. Platí $D(h) = \mathbb{R}$, položíme tedy $I = \mathbb{R}$.

Singulární řešení' jsou

$$(D1-4) \quad y(x) = (-k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in I.$$

Položíme $J_0 = (0, \infty)$ a $J_k = \left(-\frac{k\pi}{2}, \frac{(-k+1)\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Intervaly $J_0, J_k, k \in \mathbb{N}$, jsou maxima'lní otevřen' intervaly v $D(g) = \mathbb{R}$, na nichž je g nenulová'.

Hledáme tedy řešení' definovaná' někde v I s hodnotami v J_0 a $J_k, k \in \mathbb{N}$.

Řešení v $I \times J_0$

Pro $y > 0$ jest $H(x) = \int e^{-x} dx = c - e^{-x}$

$$a \quad G(y) = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}.$$

Zvolíme $G(y) = \sqrt{y}$, potom je $G(J_0) = (0, \infty)$.

Z teorie vyplývá, že každému bodu $[x, y] \in I \times J_0$

procházejí právě jedno řešení y splňující

$$(D1-5) \quad \sqrt{y} = C - e^{-x}, \text{ přičemž } C - e^{-x} \in (0, \infty), C \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$(D1-6) \quad y_c(x) = (C - e^{-x})^2, \quad x \in I_c,$$

kde I_c jsou max. at. intervaly v $(0, \infty)$, tedy

$$C - e^{-x} \in (0, \infty) \Leftrightarrow C - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow C > e^{-x}.$$

Je-li $C \leq 0$, pak $I_c = \emptyset$.

Je-li $C > 0$, pak $I_c = (\log \frac{1}{c}, \infty)$.

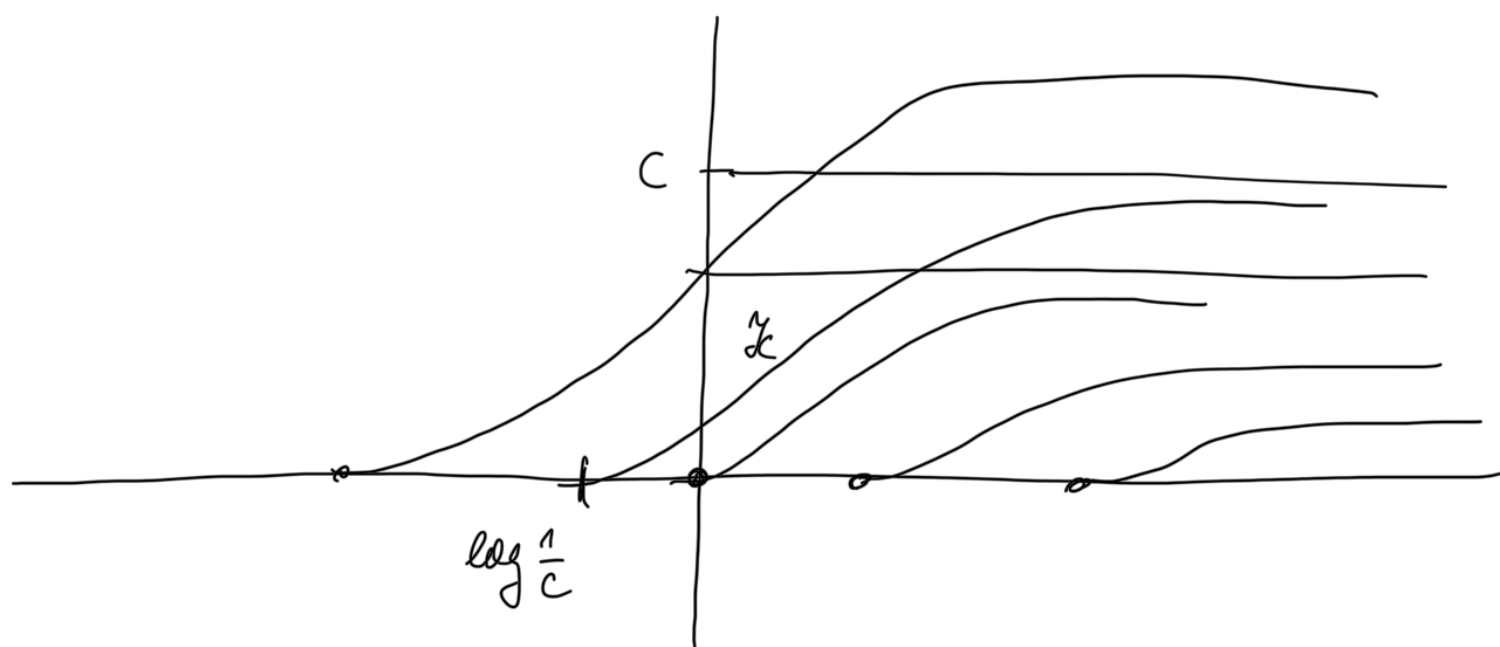
Tedy pro $C > 0$

$$(D1-7) \quad y_c(x) = (C - e^{-x})^2, \quad x \in (\log \frac{1}{c}, \infty).$$

lepení Protože

$$\lim_{x \rightarrow \log \frac{1}{c}^+} y_c(x) = 0,$$

lze řešení y_c v bodě $x = \log \frac{1}{c}$ nalepit na $y = 0$.



Řešení v $I \times J_k$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $x \in I$ a $y \in J_k$ platí

$$H(x) = \int dx \stackrel{c}{=} x = x + C$$

$$a \quad G(y) = \int \frac{2}{\sin(2y)} dy = \int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y}$$

$$\stackrel{c}{=} \log |\operatorname{tg} y|.$$

Odtud plyne, že $G(J_k) = \mathbb{R}$. To znamená, že podmínka $x + C \in G(J_k)$ je automaticky splněna pro každé $C \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\log |\operatorname{tg} y_c(x)| = x + C, \quad x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R},$$

tj.

$$|\operatorname{tg}(y_c(x))| = e^{x+C}, \quad x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}.$$

Je-li $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $k=2m+1$, potom $J_k = (-m\pi - \frac{\pi}{2}, -m\pi)$,

a tedy z podmínky $y_c \in J_k$ plyne

$$y_c(x) = -\operatorname{arctg}(e^{x+c}) - m\pi, \quad x \in I.$$

Je-li $m \in \mathbb{N}$ a $k=2m$, potom $J_k = (-m\pi, -m\pi + \frac{\pi}{2})$,

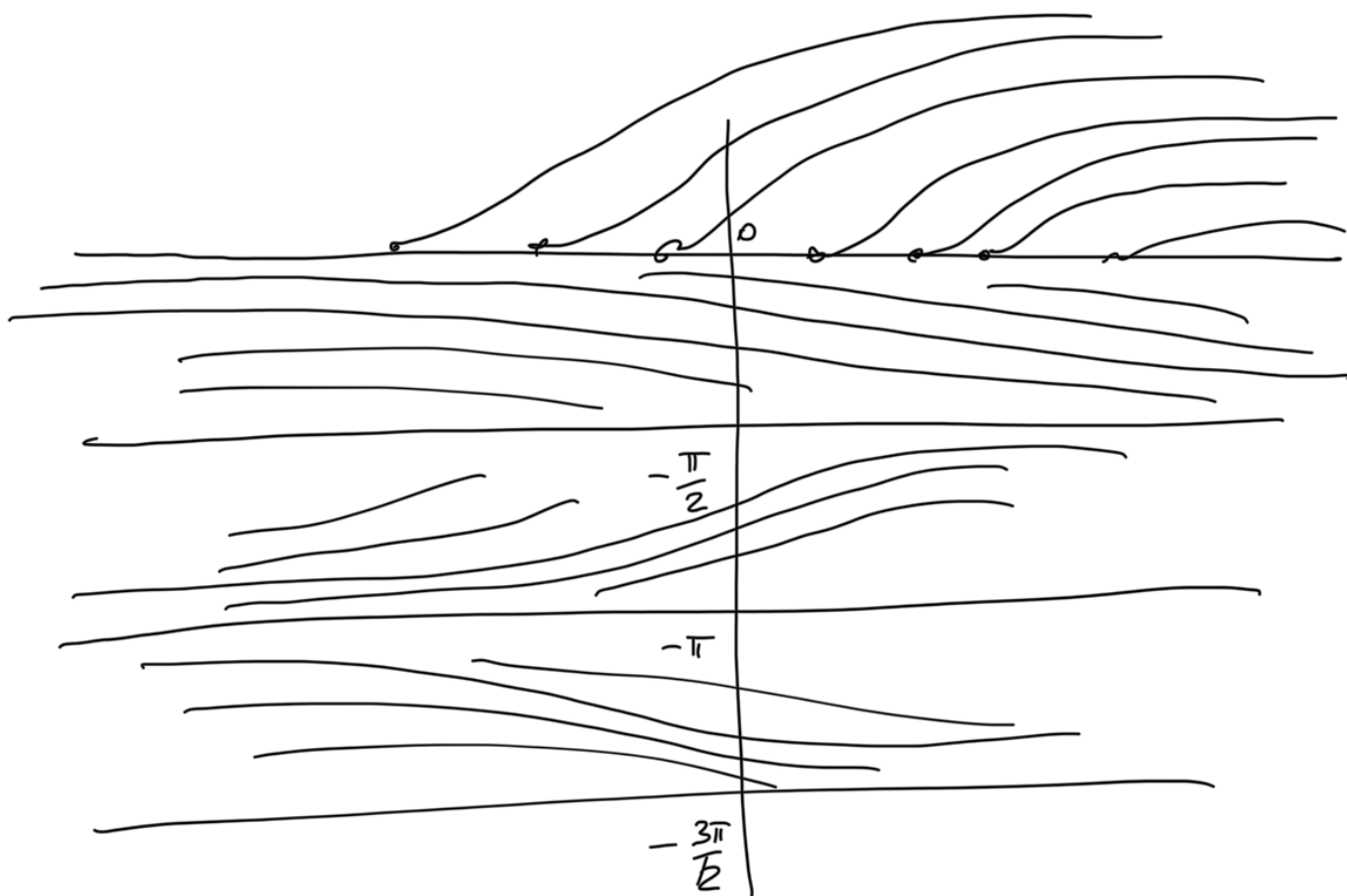
a tedy z podmínky $y_c \in J_k$ plyne

$$y_c(x) = \operatorname{arctg}(e^{x+c}) - m\pi, \quad x \in I.$$

Tedy celkem

$$y_c(x) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}(e^{x+c}) - m\pi, & x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, k=2m+1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \operatorname{arctg}(e^{x+c}) - m\pi, & x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, k=2m, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Lepeší zřejmě nepřipadá v úvahu.



Popis všech řešení

$$(i) \quad y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \log \frac{1}{c}), \\ (c - e^{-x})^2, & x \in [\log \frac{1}{c}, \infty) \end{cases}, \quad c > 0,$$

$$(iii) \quad y = (-k+1)\frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$(iv) \quad y(x) = \begin{cases} -\arctg(e^{c+x}) - m\pi, & x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, k=2m+1, m \in \mathbb{N}_0, \\ \arctg(e^{c+x}) - m\pi, & x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, k=2m, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(b) Položíme $x=0$ a $y = -\frac{3\pi}{4}$, potom $[x, y] \in I_x J_2$,
a tedy hledáme $c \in \mathbb{R}$, pro které 'platí' (neboť $k=2$)

$$y_c(x) = \arctg(e^{c+x}) - \pi.$$

Po dosazení $y_c(0) = -\frac{3\pi}{4}$ a $x=0$ dostaneme

$$-\frac{3\pi}{4} = \arctg(e^c) - \pi,$$

tedy $\arctg(e^c) = \frac{\pi}{4}$, neboli $e^c = 1$, takže $c=0$.

Hledané řešení splývající počátečním podmínkou tedy je

$$y(x) = \arctg(e^x) - \pi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

HOĎNOCENÍ singulární řešení 1

řešení v $I_x J_0$ 3

řešení v $I_x J_k, k \in \mathbb{N}$ 3

grafy 2

poč. podmínka 1

D2 Uvažujte soustavu dif. rovnic

$$(D2-1) \begin{cases} 5y' - 2x' + 4y - x = e^{-t} \\ y' + 8y - 3x = 5e^t \end{cases}$$

pro dif. funkce x, y proměnné t .

(a) Naleznete všechna max. řešení soustavy (D2-1).

(b) — " — splňující poč. podm. $x(0) = 2, y(0) = 1$.

(c) Určete všechna $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pro která jsou řešení x, y soustavy (D2-1) splňující $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, omezena na $[0, \infty)$.

Řešení. Sestavíme λ -matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2\lambda - 1 & 5\lambda + 4 & e^{-t} \\ -3 & \lambda + 8 & 5e^{-t} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{upravíme:} \\ + \left(-\frac{1}{3}\right)(2\lambda + 1) \times \text{druhý řádek} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{4}{3} & \frac{8}{3}e^{-t} \\ -3 & \lambda + 8 & 5e^{-t} \end{array} \right),$$

neboť

$$-2\lambda - 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(2\lambda + 1)(-3) = 0,$$

$$5\lambda + 4 + \left(-\frac{1}{3}\right)(2\lambda + 1)(\lambda + 8) =$$

$$= 5\lambda + 4 + \left(-\frac{1}{3}\right)(2\lambda^2 + 17\lambda + 8)$$

$$= 5\lambda + 4 - \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{17}{3}\lambda - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{4}{3}$$

a

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(2\lambda + 1) \left[5e^{-t}\right] + e^{-t}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)(-10e^{-t} + 5e^{-t}) + e^{-t} = \frac{8}{3}e^{-t}.$$

Z prvního řádku upravené λ -matice dostaneme

$$(D2-2) \quad y'' + y' - 2y = -4e^{-t}.$$

Charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

ma' kořeny $\{-2, 1\}$, a tedy fundamentální

system homogenní rovnice $y'' + y' - 2y = 0$ je

$\{e^{-2t}, e^t\}$. Protože (D2-2) je rovnice se speciální

pravou stranou $-4e^{-t} = e^{-t}(-4 \cos(0) + 0 \sin(0))$

a číslo $-1 + 0i = -1$ není kořenem $P(\lambda)$, hledáme

partikulární řešení rovnice (D2-2) ve tvaru

$$(D2-3) \quad y_p(t) = Ae^{-t}, \quad A \in \mathbb{R},$$

neboť $\max\{st(-4), st(0)\} = 0$. Derivováním dostaneme

$$y_p'(t) = -Ae^{-t}, \quad y_p''(t) = Ae^{-t},$$

a tedy po dosazení do (D2-2) máme

$$Ae^{-t} - Ae^{-t} - 2Ae^{-t} = -4e^{-t},$$

takže $A = 2$ a $y_p(t) = 2e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Obecné řešení rovnice (D2-2) je tedy tvaru

$$y(t) = \alpha e^{-2t} + \beta e^t + 2e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z druhého řádku upravené λ -matice dostaneme rovnici

$$(D2-4) \quad -3x + y' + 8y = 5e^{-t},$$

tedy $3x = y' + 8y - 5e^{-t}$. Derivováním dostaneme

$$y'(t) = -2\alpha e^{-2t} + \beta e^t - 2e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a tedy po dosazení do (D2-4)

$$\begin{aligned} 3x &= -2\alpha e^{-2t} + \beta e^t - 2e^{-t} + 8\alpha e^{-2t} + 8\beta e^t + 16e^{-t} - 5e^{-t} \\ &= 6\alpha e^{-2t} + 9\beta e^t + 9e^{-t}, \end{aligned}$$

a tedy $x = 2\alpha e^{-2t} + 3\beta e^t + 3e^{-t}$.

Obecné řešení soustavy (D2-1) je tedy tvaru

$$(D2-5) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} 2\alpha e^{-2t} + 3\beta e^t + 3e^{-t} \\ \alpha e^{-2t} + \beta e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Dosazením $t=0$ do (D2-5) dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x(0) &= 2\alpha + 3\beta + 3 \\ y(0) &= \alpha + \beta + 2 \end{aligned}$$

Odečtením rovníc dostaneme

$$x(0) - 2y(0) = \beta - 1,$$

tedy

$$(D2-6) \quad \beta = x(0) - 2y(0) + 1.$$

Dosadíme $x(0)=2$, $y(0)=1$ a dostaneme $\beta=1$.

že soustavu dopočítáme $\alpha = 1 - 1 - 2 = -2$.

Tedy řešení splňující poč. podm. je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} -4e^{-2t} + 3e^t + 3e^{-t} \\ -2e^{-2t} + e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Z (D2-5) plyne, že x, y jsou omezené na $[0, \infty)$

právě tehdy, když $\beta=0$. Z (D2-6) plyne, že to

nastává pro řešení splňující $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$

právě tehdy, když

$$(D2-7) \quad x_0 - 2y_0 + 1 = 0.$$

Нодносем!

(a) 6

(b) 2

(c) 2

D3 Dokažte, že vztahy

$$(D3-1) \begin{cases} \cos(x+y) + \cos(u+v) - u = 0 \\ \sin(xy) + \arctg(uv) + v = 0 \end{cases}$$

definují na jistém okolí bodu $[u, v, x, y]$ diferencovatelné

funkce u, v proměnných x, y splňující $u(0, \pi) = 0$

a $v(0, \pi) = 0$. Necht' $h = [-\frac{1}{2}, 7e]$. Rozhodněte, zda

existuje $D_h v(0, \pi)$, a pokud ano, spočítejte ji.

Řešení: Definujme funkce $F, G: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$F(u, v, x, y) = \cos(x+y) + \cos(u+v) - u,$$

$$G(u, v, x, y) = \sin(xy) + \arctg(uv) + v.$$

Potom $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Označme $a = [0, 0, 0, \pi] \in \mathbb{R}^4$. Pak

$$F(a) = G(a) = 0.$$

Derivováním dostaneme

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(u, v, x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(u+v) - 1 & -\sin(u+v) \\ \frac{v}{1+u^2v^2} & \frac{u}{1+u^2v^2} + 1 \end{pmatrix},$$

takže

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(a) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Tedy dle VOIF existují okolí U bodu $[0, \pi]$ a

okolí V bodu $[0, 0]$ taková, že pro každá $[x, y] \in U$

existuje právě jedna dvojice $u(x, y), v(x, y) \in V$, přičemž

$u, v \in C^\infty(U)$.

Protože $v \in C^\infty(U) \subset \mathcal{E}^1(U)$, existuje totální
diferenciál funkce v na U , a tedy existuje i
 $D_h v(0, \pi)$. Podle věty o derivaci podle vektoru,
totálním diferenciálu a gradientu (věta 9.6) platí

$$D_h v(0, \pi) = \nabla v(0, \pi) \cdot h.$$

Jest
$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, \pi) = - \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, x)}(a)}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}(a)}$$

$$= \left| \begin{array}{cc} -1 & -\sin(x+y) \\ 0 & y \cos(xy) \end{array} \right|_{[x, y] = [0, \pi]}$$

$$= \left| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{array} \right| = -\pi$$

a
$$\frac{\partial v}{\partial y}(0, \pi) = - \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(a)}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}(a)}$$

$$= \left| \begin{array}{cc} -1 & -\sin(x+y) \\ 0 & x \cos(xy) \end{array} \right|_{[x, y] = [0, \pi]}$$

$$= \left| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right| = 0,$$

takže

$$D_h v(0, \pi) = (-\pi, 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 7e\right) = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Hodnocení</u> :	předpoklady VOF	2
	závěz (7 okol')	2
	$\nabla v (0, \pi)$	4
	$D_R v (0, \pi)$	2

D4 Definujme funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y, z) = x - y + 2z$$

a množinu M předpisem

$$M = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 < 4 \}.$$

Určete $\sup_M f(x, y, z)$ a $\inf_M f(x, y, z)$

a rozhodněte, zda f těchto hodnot na M nabývá!

Řešení. Položme

$$H = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \}$$

a definujme funkce $g_1, g_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisy

$$g_1(x, y, z) = z, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Potom g_1, g_2 jsou spojité!

$H = g_1^{-1}((-\infty, 1]) \cap g_2^{-1}([0, 4])$,
množiny $(-\infty, 1], [0, 4]$ jsou uzavřené v \mathbb{R} ,

tedy $g_1^{-1}((-\infty, 1])$ a $g_2^{-1}([0, 4])$ jsou uzavřené v \mathbb{R}^3 , takže H je uzavřená v \mathbb{R}^3 . Navíc

$H \supset M$ a pro každé $[x, y, z] \in H$ lze zřejmě nalézt

posloupnost $\{ [x_n, y_n, z_n] \} \in M$ splňující

$$[x_n, y_n, z_n] \rightarrow [x, y, z] \text{ v } \mathbb{R}^3.$$

Tedy $H = \bar{M}$. Množina H je také omezená v \mathbb{R}^3 ,

neboť je-li $[x, y, z] \in H$, pak

$$\| [x, y, z] \|_{\mathbb{R}^3}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,$$

takže $\| [x, y, z] \|_{\mathbb{R}^3} \leq 2$.

Tedy \bar{M} je kompaktní. Funkce f je spojitá na \bar{M} ,
a tedy

$$\sup_M f = \sup_{\bar{M}} f, \quad \inf_M f = \inf_{\bar{M}} f$$

Odtud plyne, že f nabývá globálních extrémů na \bar{M} .

Protože $\nabla f(x, y, z) = (1, -1, 2)$, $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$,

f nemá stacionární body na $\text{Int } M$. Zároveň
existuje ∇f na $\text{Int } M$, a tedy se globální extrém
 f na \bar{M} nacházejí na $\text{Int } M$, pouze na $H(M)$.

Platí

$$H(M) = H_1 \cup H_2,$$

kde $H_1 = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z = 1 \}$,

$$H_2 = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 1 \}.$$

kandidáti na H_1

$$\text{Jest } H_1 = \{ [x, y, 1] : x^2 + y^2 \leq 3 \}.$$

Položíme $g(x, y) = x - y + 2$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{a } B = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3 \}.$$

Protože $\nabla g(x, y) = (1, -1)$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2$,

g nemá stacionární body. Množina B je zřejmě
uzavřená a omezená, tedy kompaktní, a tedy
 g nabývá svých globálních extrémů na

$$H(B) = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3 \}.$$

Položíme $L_1(x, y, \lambda) = x - y + 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 3)$. Podle

VOLM extrémů funkce g na $H(B)$ vyhovují soustavě

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y} = -1 + 2y\lambda = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 3 = 0. \quad (3)$$

sečtem'ím (1) a (2) dostaneme $\lambda(x+y) = 0$. Z (1)

plyne, že $\lambda \neq 0$, takže musí' platit $x+y=0$. Dosazem'ím

$x=-y$ do (3) dostaneme $2x^2=3$, tedy $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$.

ze vztahu $x=-y$ dopočítáme y a dostaneme kandidá'ty

$$A = \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 \right], \quad B = \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 \right].$$

kandidá'ti na H_2 Jest

$$H_2 = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, -2 \leq z \leq 1 \}.$$

Položme $E = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$. Najdeme

globá'lní extrém'y f na E (ta je zřejimě kompaktní).

Položme

$$L_2(x, y, z, \lambda) = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Dle VOLM kandidá'ti na extrém'y f na E splňuj'í'

bud' $\text{D}f = (2x, 2y, 2z) = 0$, tedy $[x, y, z] = 0$

nebo vyhovuj'í soustavě

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial y} = -1 + 2y\lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial z} = 2 + 2z\lambda = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \quad (4).$$

Protože $0 \notin E$, plyní možnost nepřípady s úvalem.

Z (1) plyne, že $\lambda \neq 0$. Tedy z (1) - (3) dostaneme

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}, \quad z = -\frac{1}{\lambda}.$$

Po dosazení do (4) obdržíme

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 4 = 0,$$

$$\text{tedy } \frac{3}{2\lambda^2} = 4, \quad \text{tedy } \lambda^2 = \frac{3}{8}, \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Odtud vy počítáme

$$x = \mp\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad z = \mp 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Nyní musíme zjistit, které z těchto bodů leží v H_2 , tedy vyhovují dodatečné podmínce $-2 \leq z \leq 1$.

Pro $z = -2\sqrt{\frac{2}{3}}$ je tato podmínka splněna, ale

pro $z = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ nikoli, neboť

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} > 1.$$

Tedy na H_2 máme jen kandidáta

$$C = \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}} \right].$$

Jest

$$f(A) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 2, \quad f(B) = -2\sqrt{\frac{3}{2}} + 2,$$

$$f(C) = -2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}} = -6\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Zřejmě je $\max_{\bar{M}} f = f(A) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 2$. Protože

$$f(B) > f(C) \Leftrightarrow -2\sqrt{\frac{3}{2}} + 2 > -6\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} > -3\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{2}{3}} > \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6} > \sqrt{\frac{3}{2}} - 1,$$

což zřejmě platí, jest $\min_{\bar{M}} f = f(C) = -6\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Tedy $\sup_M f = 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 2$ a $\inf_M f = -6\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Protože $A \notin M$ a $C \notin M$, suprema ani infima funkce f na M nenabyvá!

HODNOCENÍ: existence extrémů na \bar{M} 1

Γ_M 1

H_1 3

H_2 3

závěr 2

D5 Rozhodněte o platnosti:

(a) $l^1 \subset C_0$

(b) l^1 separabilní

(c) l^1 kompaktní

(d) l^1 je květkově souvislá podmnožina C_0 .

Řešení (a) PLATÍ

Důkaz. $x \in l^1 \Rightarrow x$ je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní, tudíž je omezená a dle nutné podmínky konvergence splňuje $\lim x_n = 0$, takže $x \in C_0$. \square

(b) PLATÍ

Důkaz. C_0 je separabilní, tedy z (a) plyne, že l^1 je separabilní podle věty o separabilitě podprostoru (věta 13.27). \square

(c) NEPLATÍ

Důkaz. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $e^i \in l^1$. Navíc pro každá $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, je $\|e^i - e^j\|_\infty = 1$.

Tedy l^1 není kompaktní.

Jiná řešení: • l^1 není omezená (je to lineární prostor),

• l^1 není uzavřená v C_0 (např.:

$$x^m = 1, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots \in l^1,$$

$$x^m \rightarrow \left\{ \frac{1}{m} \right\} \in C_0, \text{ ale } \left\{ \frac{1}{m} \right\} \notin l^1. \quad \square$$

(d) PLATI'

Důkaz. zvol $x, y \in l^1$. Definujme $F: [0,1] \rightarrow C_0$
přepisem $F(t) = (1-t)x + ty$.

Potom $F(0) = x$, $F(1) = y$. Pro $s, t \in [0,1]$ platí

$$\|F(s) - F(t)\|_{l^\infty} = \|(1-s)x - (1-t)x + sy - ty\|_{l^\infty}$$

$$= \|(t-s)(x-y)\| = |t-s| \cdot \|x-y\|,$$

talž F je Lipschitzovka, a tedy spojitá.

Zbývá dokázat, že $R(F) \subset l^1$. To plyne

s linearity AK řad, přesněji, pro $t \in [0,1]$

$$\text{je } \sum_{n=1}^{\infty} |F(t)|_n = \sum_{n=1}^{\infty} |(1-t)x_n + ty_n|$$

$$\leq (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + t \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty,$$

talž $F(t) \in l^1$. Protože t bylo voleno

libovolně, platí $F: [0,1] \rightarrow l^1$.

Tedy l^1 je lineárně současná.

JINÉ ŘEŠENÍ. S linearity prostoru AK řad

plyne, že l^1 je kommutativní množina v NLP C_0 .

Tudíž je lineárně současná (věta 13.34). \square

Hodnocení.

(a) 2

(b) 3

(c) 2