Homework 14.2.

1. Images and preimages.

1.1. For which $f : X \to Y$ one has $f[f^{-1}[B]] = B$ for all $B \subseteq Y$?

1.2. For which $f : X \to Y$ one has $f^{-1}[f[A]] = A$ for all $A \subseteq X$?

2. Composition of maps.

2.1. Prove that inverse is uniquely defined.

2.2. Which maps are characterized by the cancellation law

$$\forall g, h \ \ (f \circ g = f \circ h \quad \Rightarrow \quad g = h) \ \ ?$$

2.3. Which maps are characterized by the cancellation law

$$\forall g, h \ \ (g \circ f = h \circ f \quad \Rightarrow \quad g = h) \ \ ?$$

3. Composition of binary relations.

$$R; S = \{(x, y) \mid \exists z, \ (x, z) \in R, (z, y) \in S\}.$$

($R \circ S$ is often defined reversely to agree with composition of maps.)

3.1. One has $R; (S; T) = (R; S); T$ and $\Delta; R = R; \Delta$ for $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

3.2. If $R \subseteq R'$ and $S \subseteq S'$ then $R; S \subseteq R' : S'$.

3.3. Which property is expressed by $R; R \subseteq R$?

3.4. Which property is expressed by $R \subseteq R; R$?

Domácí úkol 2.

1. Suprema a infima.

1.1. Formule

(1) $\forall m \in M,\ m \leq s$ a

(2') $x < s \quad \Rightarrow \quad \exists y \in M, x < y$

characterizují suprema v lineárních uspořádáních.

1.2. Co se stane např. v $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$? Jaká je v 1.1 role linearity?

1.3. Zobrazení $\downarrow = (x \mapsto \downarrow x) : (X, \leq) \to (\mathfrak{P}(X), \subseteq)$ zachovává infima. Jak je to se supremy?

2. Speciální uspořádání.

2.1. Konečné dolní polosvazy mají nejmenší element.

2.2. Konečné svazy jsou vždy omezené.

2.3. Existence infim plyne z existence (všech) suprem a naopak. Jak je to s konečnými infimy a konečnými supremy?

3. Dedekind – MacNeilleovo zúplnění.

Pro $(X, \leq)$ si připomeňte zobrazení $\mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$

$$\begin{aligned}
\mathsf{ub}(M) &= \{y \mid M \subseteq \downarrow y\},\\
\mathsf{lb}(M) &= \{y \mid M \subseteq \uparrow y\},\\
\nu(M) &= \mathsf{lb}(\mathsf{ub}(M)).
\end{aligned}$$

3.1. ub a lb jsou antitonní a
pro $\nu(M) = \mathsf{ub}(\mathsf{lb}(M))$ platí $M \subseteq \nu(M)$.

3.2. $\nu(a) = \mathsf{ub}(\downarrow a) = \uparrow a$ a $\mathsf{lb}(\uparrow a) = \downarrow a$, $\nu\nu(M) = \nu(M)$.

3.3. Pro suprema $\bigvee$ v $L = \{M \mid M = \nu(M)\}$ platí $\bigvee A_i = \nu(\bigcup A_i)$

3.4. $(x \mapsto \downarrow x) : (X, \leq) \to L$ zachovává existující suprema.

(To je trochu těžší. Bude-li s tím problém, vyhledejte si to v textu, ale nejprve se snažte na to přijít sami.)

Domácí úkol 3.

1. Pro každé $f : X \to Y$ zachovává $f^{-1}[-] : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ komplementy (doplňky $Y \smallsetminus B$).

2. Zobrazení $f^{-1}[-] : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ (které má levý adjunkt $f[-]$) má též pravý adjunkt (použijte 1).

3. Zobrazení $f[-]$ ale obecně levý adjunkt nemá.

4. Jaký je tedy podstatný rozdíl mezi $f[-]$ a $f^{-1}[-]$?

5. Pro množinu (abecedu) M uvažujme pologrupu M^+ slov s operací konkatenace. Položme

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \{vw \mid v \in A, w \in B\}, \\ C/B &= \{w \mid \forall b \in B, wb \in C\}, \\ A \setminus C &= \{w \mid \forall a \in A, aw \in C\}. \end{aligned}$$

5.1. Platí že $A \cdot B \subseteq C$ právě když $A \subseteq C/B$.

5.2. A co platí o $A \setminus C$?

5.3. Jaké jsou zde adjunkce, a co z nich plyne?

Domácí úkol 4.

Tentokrát opakování několika faktů z klasické algebry.

1. $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$ bude komutativní okruh s jednotkou. Tedy, $(R, +, 0)$ je abelovská grupa, $x \cdot y$ je asociativní a komutativní operace, $x \cdot 1 = x$ a $x \cdot (y + x) = x \cdot y + c \cdot z$. Budeme psát prostě xy místo $x \cdot y$.

Ideál v okruhu R je neprázdná $J \subseteq R$ taková, že

- $(J, +, 0)$ je podgrupa grupy $(R, +, 0)$, a
- pro $j \in J$ a $x \in R$ libovolné je $jx \in J$.

J je *vlastní* pokud $J \neq R$.

Maximální ideál není obsažen v žádném větším vlastním ideálu.

Ideál J je *prvoideál* pokud z $ab \in L$ plyne, že buď $a \in J$ nebo $b \in J$.

1.1. Každý ideál obsahuje 0, a je vlastní právě když neobsahuje 1.

1.2. Relace $\sim\, = \,\sim_J$ definovaná předpisem

$$x \sim y \quad \equiv_{\mathrm{df}} \quad x - y \in J$$

je ekvivalence, a ekvivalenční třídy $[x]$ jsou množiny tvaru $x + J = \{x + j \mid j \in J\}$. Následkem toho, $x + J$ a $y + J$ se buď shodují nebo jsou disjunktní.

2. Označme R/J množinu tříd ekvivalence v $\sim_J$.
$\sim_J$ je kongruence (to jest, $x_1 \sim x_2$ a $y_1 \sim y_2$ implikují $x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$ a $x_1y_1 \sim x_2y_2$). Tedy je R/J opět komutativní okruh s jednotkou.

2.1. Nula v R/J je J a jednotka je $1 + J$.

2.2. Buď $\sim$ kongruence na R. Potom je $\sim = \sim_J$ pro nějaký ideál J.

3. Buď J ideál a $a \in R$. Potom

$$J_a = \{j + xa \,|\, j \in J, x \in R\}$$

je ideál pro který $J \subseteq J_a$ a $a \in J$.

4. Je-li J prvoideál, je R/J obor integrity (to jest, $[x] \cdot [y] = 0$ jen když $[x]$ nebo $[y]$ je 0).

5. Je-li J maximální ideál je R/J těleso. (Návod: pro $[a] \neq 0$ užijte J_a z bodu 3).

Domácí úkol 5.

1. Heytingovy algebry.

1.1. Pro každou částečně uspořádanou množinu $(X, \leq)$ je

$$L = (\{M \mid M = \uparrow M, M \subseteq X\}, \subseteq) \quad \text{kde} \quad \uparrow M = \{x \in X \mid \exists m \in M, x \geq m\}$$

Heytingova algebra. (Návod: Distributivní pravidlo a existence adjunktu.)

1.2. Pokuste se najít formuli pro Heytingovu operaci v L z 1.1.

1.3. Buď X metrický prostor.

$$\Omega(X) = (\{U \mid U \text{ otevřená v } X\}, \subseteq)$$

je Heytingova algebra. (Návod: Distributivní pravidlo a existence adjunktu.)

1.4. Podobně jako A in X můžeme definovat *vnitřek* množiny A v metrickém prostoru X jako

$$A^\circ = \bigcup \{U \text{ otevvřená v } X \mid U \subseteq A\}.$$

Najděte formuli pro Heytingovu operaci v $\Omega(X)$.

1.5. Buď metrický prostor. Nechť není diskretní, t.j., nechť existuje $x \in X$ takový, že množina $\{x\}$ není otevřená. Potom $\Omega(X)^{\mathrm{op}}$ není Heytingova algebra.

2. Booleanizace. Buď L dolní polosvaz s pseudokomplementy. Položme

$$\mathfrak{B}(L) = \{a \in L \mid a^{**} = a\}$$

(uspořádání jako v L).

2.1. $\mathfrak{B}(L) = \{a^{**} \mid a \in L\} = \{a^* \mid a \in L\}$.

2.2. $\mathfrak{B}(L)$ je dolní polosvaz. V jakém je vztahu k původnímu L?

2.3. Položme $a \sqcup b = (a^* \wedge b^*)^*$. Potom je $a \sqcup b$ supremum množiny $\{a, b\}$ v $\mathfrak{B}(L)$.

2.4. $\mathfrak{B}(L)$ je Heytingova algebra s operací $b \to c = (b \wedge c^*)^*$. Speciálně je tedy distributivní.

2.5. $\mathfrak{B}(L)$ je Booleovská algebra.

Domácí úkol 6.

1. Operace a relace.

1.1. Buďte $\alpha : X \times X \to X$ a $\beta : Y \times Y \to Y$ binární operace. Definujte ternární relace R, S na X, Y předpisem

$$R = \{(a, b, c \,|\, c = \mathcal{A}(a, b)\}, \;\; S = \{(a, b, c \,|\, c = \beta(a, b)\}.$$

Dokažte, že $f : X \to Y$ je homomorfismus $(X, \alpha) \to (Y, \beta)$ právě když je to homomorfismus $(X, R) \to (Y, S)$.

1.2. Generalizujte na M-ární operace a $(M + 1)$-ární relace. (Začněte definicí vhodné $M + 1$.)

2. K pozorováním na straně 13. Dokažte podrobně, že

2.1. je-li $B = (Y, \alpha|Y)$ podalgebra algebry $A = (X, \alpha)$ je $j : B \subseteq A$ homomorfismus,

2.2. pro každý homomorfismus $f : B \to A$ je obraz $f[B]$ podalgebra algebry A,

2.3. je-li $f : B \to A$ prosté, potom $f' : B \to f[B]$ definované předpisem $f'(x) = f(x)$ je isomorfismus.

3. Kongruence. (Konstrukce racionálních čísel) Připomeňme, že *kongruence* na algebře (X, α) s binární operací je ekvivalence E na X taková, že

$$\text{je-li } \; xEx' \text{ a } yEy' \; \text{ je } \; \alpha_i(x, y)E\alpha_i(x', y'), \; i = 1, 2.$$

Na množině $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definujte binární relaci ($a \cdot b$ je standardní násobení)

$$(x, y)E(u, v) \quad \equiv_{\text{def}} \quad x \cdot v = y \cdot u.$$

3.1. E je ekvivalence.

3.1. Na X definujte operaci

$$(x, y) \bullet (u, v) = (x \cdot u, y \cdot v).$$

Potom je E kongruence vzhledem k $\bullet$.

3.1. Na X definujte operaci

$$(x, y) + (u, v) = (x \cdot v + y \cdot u, y \cdot v).$$

Potom je E kongruence vzhledem k $+$.

Domácí úkol 7.

1. Kongruence na okruhu $\mathbb{Z}$.

1.1. Pro pevné $n \in \mathbb{Z}$ definujme relaci $E_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ předpisem

$$xE_ny \quad \equiv_{\mathrm{df}} \quad \exists k, x - y = kn.$$

E_n je kongruence.

1.2. Pro každá dvě čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ existují x, y taková, že $xa+yb$ je největší společný násobek a, b.

Návod: Zkuste $d = xa+yb$ s nejmenší kladnou hodnotou a studujte zbytek při dělení a číslem d.

1.3. Užitím 1.2 dokažte, že $\mathbb{Z}/E_n$ je těleso právě když n je prvočíslo.

2. Kongruence v grupách. (V abelových grupách píšeme operaci jako sčítání, v obecných grupách jako násobení.)

2.1. Předpisy

$$xE_Ay \;\equiv_{\mathrm{df}}\; x - y \in A \quad \text{a} \quad A_E = \{x \mid xE0\}.$$

dávají vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi podgrupami A abelovské grupy G a kongruencemi E na G.

2.2. Buď G obecná grupa a A její podgrupa. Buď

$$xE_Ay \;\equiv_{\mathrm{df}}\; xy^{-1} \in A.$$

Je to kongruence vzhledem k operaci inverse a platí

$$\forall a \in A, \forall x \in G\ \exists b \in A \text{ takové, že } ax = xb. \tag{norm}$$

2.3. Podgrupy splňující (norm) se nazývají *normální podgrupy*. Dokažte, že pro normální podgrupu je relace

$$xE_Ay \;\equiv_{\mathrm{df}}\; xy^{-1} \in A$$

kongruence vzhledem k celé grupové struktuře.

Homework 8

1. Describe the suprema $A \vee B$ in the lattice L of all vector subspaces of a vector space V.

2. Prove that the lattice L from 1 is modular.

3. Describe the suprema $A \vee B$ in the lattice L of all subgroups of an abelian group G.

4. Prove that the lattice L from 3 is modular.

5. Recall that an element $p \neq 1$ of a lattice L is prime if $a \wedge b \leq p$ implies that either $a \leq p$ or $b \leq p$.

> **5.1.** Let L be a complete lattice. Then the prime elements in L are in a one-to- one correspondence with the $h : L \to \{0, 1\}$ preserving all finite suprema and all infima. (Hint: For a prime element p define h by $h(x) = 0$ iff $x \leq p$.)
>
> **5.2.** Prove that a prime element in a Boolean algebra is maximal, that is, $p < x$ impliex $x = 1$. (Hint: What happens with x^* ?)
>
> **5.3.** Find a lattice with no prime elements. (Hint: Recall the Booleanizations.)

6. Consider the class $\mathcal{A}$ of all $(X, \wedge, \alpha, \beta)$ such that α, β is an adjoint pair of maps $\alpha, \beta : X \to X$ that are $\wedge$-homomorphisms. $\mathcal{A}$ is a variety.
(Hint: Use the other characterization of adjunction.)

7. Heyting algebras constitute a variety. Write down a satisfactory system of equations.