Výpočty v LS (anna-lýza 2)

Iosephus Kučeravý, Lukáš Krump, Anna

Obsah

1 Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

1.1 Co to je?

ODR = rovnice ve tvaru:

$$\mathbf{F}\big(y^{(n)}(x),\ y^{(n-1)}(x),\ \ldots,\ y'(x),\ y(x),\ x\big) = 0, \tag{ODR}$$

kde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+2} \supseteq D_F \to \mathbb{R}$ je nějaká funkce.

Typologie úloh:

(I) obecná úloha

(II) Cauchyho úloha

I. Obecná úloha:

Cíl: Najít $\forall$ funkce $y(x)$ splňující zadanou ODR na maximálním možném intervalu

II. Cauchyho úloha:

Cíl: Najít řešení ODR a pak určit právě 1 funkci $y(x)$ splňující

zadanou ODR s počáteční podmínkou: $y_0(x_0) = a_0, \quad x_0, a_0 \in \mathbb{R}$

1.2 Separované proměnné

Počáteční krok: určit definiční obor x a y

Tvar:

$$y' = g(y) \cdot f(x)$$

kde g a f jsou nějaké funkce modifikující y resp. x (například odmocnina, etc.)

Řešení:

(a) pokud $g(y) \equiv 0$ v nějakém intervalu $x \in (a, b)$ $\quad\to$ **možná** vede na řešení

(b) pro $g(y) \neq 0$ všude v $x \in (a, b)$ dále upravujeme:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

$$\underbrace{\int \frac{y'}{g(y)} dy}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x) dx}_{F(x)}$$

$$G(y) = F(x) + C$$

(c) Finální výsledek vznikne lepením (v závislosti na C)

$$y = G^{-1}\left(F(x) + C\right)$$

1.3 Homogenní ODR

Tvar:

$$y' = g\left(\frac{x}{y}\right)$$

Přeznačení homogenního výrazu:

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = g(z)$$

Řešení: pro $x \neq 0$

(a) substituce homogenního výrazu:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

(b) vyjádření derivace po substituci

$$z'(x) = \frac{y'(x) \cdot x - y(x)}{x^2}$$

$$z'(x) = \frac{1}{x}\left(y'(x) - \frac{y(x)}{x}\right)$$

po dosazení za y' ze zadání:

$$z'(x) = \frac{1}{x}\left(g\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y(x)}{x}\right)$$

(c) finální tvar ODR po substituci:

$$z'(x) = \frac{1}{x}\left(g(z) - z\right)$$

(d) dále řešíme přes separované proměnné a nakonec resubstituujeme $z \to y$

1.4 Lineární ODR 1. řádu (s nekonstantními koeficienty)

Tvar:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

Řešení:

(a) zavedeme si integrační faktor:

$$\boldsymbol{e^{P(x)}} \qquad \text{kde } P(x) = \int p(x)dx \tag{IF}$$

(b) upravujeme:

$$\left(y \cdot e^P\right)' = \underbrace{(y' + p \cdot y)}_{=q} \cdot e^P$$

$$\left(y \cdot e^P\right)' = q \cdot e^P$$

$$y \cdot e^P = \int q \cdot e^P + C$$

(c) finální tvar výsledku:

$$y = e^{-P} \cdot \left(\int q \cdot e^P + C\right)$$

1.5 Bernoulliho rovnice

Tvar:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \cdot y^{\alpha}(x)$$

Zamyšlení:

Již známe:

(i) pro $\alpha = 0$ $\longrightarrow$ LDR 1. řádu (řešíme přes integrační faktor)

(ii) pro $\alpha = 1$ $\longrightarrow$ separované proměnné: $y' = (q - p) \cdot y$

Řešení:

(a) pro $y \equiv 0$

- pro $\alpha \geq 0$ dostáváme triviální řešení ($y \equiv 0$)
- pro $\alpha < 0$ dostáváme NONSENS!

(b) pro $y \neq 0$ dále upravujeme:

$$y' + p \cdot y = q \cdot y^{\alpha}$$

——— vynásobení $y^{1-\alpha}$ ———

$$y' \cdot y^{-\alpha} + p \cdot y^{1-\alpha} = q$$

——— substituce: $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ ———

$$z'(x) = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}(x) \cdot y'(x)$$

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} + p(x) \cdot z(x) = q(x)$$

(c) dále přes integrační faktor

(d) nakonec převod

$$y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

1.6 Lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty

U tohoto typu ODR nemusíme řešit lepení, protože řešení dostáváme ve tvaru exponenciál, které jsou definované na celém $\mathbb{R}$

$$\underbrace{a_n \cdot y^{(n)} \;+\; a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} \;+\; \cdots \;+\; a_2 \cdot y'' \;+\; a_1 \cdot y' \;+\; a_0 \cdot y}_{L(y)} \;=\; f(x) \qquad a_n \in \mathbb{R}$$

kde $L(y)$ je levá strana závislá pouze na y; $f(x)$ je pravá strana závislá pouze na x

Řešení:

Řešení hledáme ve tvaru:

$$y = y_h + y_p$$

kde y_h je homogenní řešení; y_p je partikulární řešení

1.6.1 Homogenní řešení: $\boldsymbol{y_h}$

Význam:

- ∀ řešení rovnice $L(y) = 0$ (s nulovou pravou stranou)
- generuje prostor řešení

Tvar řešení:

$$y_h = \sum_{i=1}^{n} C_i\, h_i, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

kde h_i jsou generátory řešení

Fundamentální systém:

- množina ∀ generátorů prostoru řešení

$$\text{F.S.} \,:\, \{h_1, \ldots, h_n\}$$

Postup řešení:

(a) najdeme tzv. charakteristický polynom:

$$P(\lambda) = a_n\, \alpha^n \;+\; a_{n-1}\, \lambda^{n-1} \;+\; \ldots \;+\; a_2\, \lambda^2 \;+\; a_1\, \lambda \;+\; a_0 \;=\; 0$$

kde λ odpovídá y', λ^2 odpovídá y'', $\ldots$, λ^n odpovídá $y^{(n)}$ v původní rovnici

(b) najdeme kořeny charakteristického polynomu:

Někdy je potřeba vyřešit tzv. binomickou rovnici, ze které dostáváme komplexní řešení, to nastává například u $\lambda^5 - 1 = 0$, řešíme přes Moivroveovu větu:

$$\sqrt[n]{z} \;=\; \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

Tvar reálných kořenů:

$\lambda \in \mathbb{R} \;\; \Rightarrow$

1-násobný kořen $\lambda \quad \rightarrow \quad$ F.S: $\{e^{\lambda x}\}$
2-násobný kořen $\lambda \quad \rightarrow \quad$ F.S: $\{e^{\lambda x},\, xe^{\lambda x}\}$
3-násobný kořen $\lambda \quad \rightarrow \quad$ F.S: $\{e^{\lambda x},\, xe^{\lambda x},\, x^2 e^{\lambda x}\}$
$\vdots$
n-násobný kořen $\lambda \quad \rightarrow \quad$ F.S: $\{e^{\lambda x},\, xe^{\lambda x},\, x^2 e^{\lambda x},\, \cdots,\, x^{n-1} e^{\lambda x}\}$

Tvar komplexních kořenů:

$\lambda = \mu + \mathrm{i}\nu \;\in \mathbb{C} \;\; \Rightarrow$

1-násobný kořen $\lambda \quad \rightarrow \quad$ F.S: $\{e^{\mu x} \cdot \cos(\nu x),\;\, e^{\mu x} \cdot \sin(\nu x)\}$
2-násobný kořen $\lambda \quad \rightarrow \quad$ F.S: $\{e^{\mu x} \cdot \cos(\nu x),\;\, e^{\mu x} \cdot \sin(\nu x),\;\, xe^{\mu x} \cdot \cos(\nu x),\;\, xe^{\mu x} \cdot \sin(\nu x)\}$
$\vdots$
n-násobný kořen $\lambda \quad \rightarrow \quad$ F.S: $\{e^{\mu x} \cdot \cos(\nu x),\;\, e^{\mu x} \cdot \sin(\nu x),\;\, \cdots,\;\, x^n e^{\mu x} \cdot \cos(\nu x),\;\, x^n e^{\mu x} \cdot \sin(\nu x),\}$

1.6.2 Partikulární řešení: $\boldsymbol{y_p}$

Význam:

◦ 1 řešení pro $L(y) = f(x)$ (ODR s pravou stranou)

◦ přidává do prostoru řešení afinní posunutí

2 nástroje řešení:

(a) speciální pravá strana (jednodušší, ale nefunguje všude)

(b) variace konstant

(a) Speciální pravá strana:

Můžeme použít, pokud:

$$f(x) = e^{\mu x}\left(P_1(x) \cdot \cos \nu x + P_2(x) \cdot \sin \nu x\right)$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad P_1(x), P_2(x)$ jsou polynomy

Řešení dostaneme ve tvaru:

$$y_p = e^{\mu x} \cdot x^k \left(Q_1(x) \cdot \cos \nu x + Q_2(x) \cdot \sin \nu x\right)$$

kde k jest násobnost kořene char. pol. $\mu + \mathrm{i}\nu$, pokud k **není kořenem** $\Leftrightarrow k = 0$,
$Q_i(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše $\max\{\text{stupeň} P_i\}$

Jak vypadá pravá strana?

pro polynomy $\quad \rightarrow \quad \mu = 0,\ \nu = 0$

pro exponenciály $\quad \rightarrow \quad \nu = 0,\ P_1(x) = C$

pro sinus a cosinus $\quad \rightarrow \quad \mu = 0,\ P_1(x) = C_1,\ P_2(x) = C_2$

Obecnější pravá strana:

- skládá se z lineární kombinace speciálních pravých stran, alias:

$$f(x) = \sum f_j(x)$$

- poté hledáme y_p pro každou speciální pravou stranu separátně

- výsledek je součtem jednotlivých partikulárních řešení

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + \cdots + y_{pj}$$

(b) Variace konstant:

Obecná methoda

- nejprve sestavíme soustavu:

$$\hat{c_1}'(x) \cdot h_1(x) + \hat{c_2}'(x) \cdot h_2(x) + \cdots + \hat{c_n}'(x) \cdot h_n(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$\hat{c_1}'(x) \cdot (h_1(x))^{(n-1)} + \hat{c_2}'(x) \cdot (h_2(x))^{(n-1)} + \cdots + \hat{c_n}'(x) \cdot (h_n(x))^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0}$$

kde $\hat{c_1}$ jsou funkce (variované konstanty), $\hat{c_1}'$ jsou jejich derivace, h_i jsou generátory řešení (prvky F.S.)

- přepíšeme do maticového tvaru
  = ($n \times n$ matice z h_i a derivací) krát ($\hat{c_i}$-vektor) = (vektor pravé strany)

- řešíme Cramerovým pravidlem

- zintegrujeme $\int \hat{c_i}' = \hat{c_i}$

- konečné řešení ve tvaru:

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} \hat{c_i}(x) \cdot h_i(x)$$

Početní část 1 - 8.7.2021

1. Jedná se o rovnici s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0$ má dvojnásobný kořen -1. Fundamentální systém je tedy $\{e^{-x}, e^{-x}x\}$.

   Vidíme, že pravá strana není ve speciálním tvaru. Dále postupujeme variací konstant. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$u'e^{-x} + v'xe^{-x} = 0$$
$$-u'e^{-x} + v'(1-x)e^{-x} = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$$

   pro neznámé funkce u, v, což můžeme přepsat jako maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{x} \cdot e^{-x} \end{pmatrix}.$$

   Z Cramerova pravidla tedy dostaneme

$$u' = e^{2x} \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \sqrt{x} \cdot e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{x}\sqrt{x} \cdot e^{-x} = -x^{\frac{3}{2}},$$
$$v' = e^{2x} \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \sqrt{x} \cdot e^{-x} \end{vmatrix} = e^{x}\sqrt{x} \cdot e^{-x} = \sqrt{x}.$$

   Integrací obou rovnic per partes získáme

$$u = -\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$
$$v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

   Partikulární řešení tedy bude mít tvar

$$ue^{-x} + vxe^{-x} = -\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}e^{-x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}xe^{-x} = \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}e^{-x}$$

   Obecné řešení je tedy tvaru

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}e^{-x},$$

   kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \infty)$.

- -

1.7 Poznámky pod parou

(a) Krumpíkova rada:

Doporučuju vám s tím pracovat tak, že si každou úlohu napřed zkusíte vyřešit sami, a až když s tím nebudete moci hnout, tak se po kouskách budete dívat na uvedená řešení.

Jedině tak se naučíte diferenciální rovnice počítat sami. Připomínám, že důležitým krokem je vůbec rozpoznat, o který typ se jedná.

Často to bývá zamaskované, musíte si zadání všelijak upravit, aby vám z toho vyskočil některý ze známých typů rovnic.

Dále si hned na začátku nezapomeňte napsat podmínky pro x a y, a odhalit případné očividné (obvykle konstantní) řešení.

V závěru si proveďte zkoušku, jestli nalezená řešení skutečně splňují zadanou rovnici, popracujte s definičními obory a zdůvodněte případné nalepování (musí se shodovat i derivace z obou stran) či jeho nemožnost.

(b) Trik při nakládání s konstantou (logaritmický tvar):

$$C = \ln(D) \quad \Leftrightarrow \quad D = e^C, \quad D > 0$$

(c) Význam pojmu homogenní výraz: “x i y ve stejné mocnině”

(d) Lepení: U lepení jest důležité:

- $f(-) = f(+)$ funkce spojitá v daném bodě
- $f'(-) = f'(+)$ derivace spojitá v daném bodě

(e) Typologie příkladů:

Spoustu diferenciálních rovnic **neumíme** řešit analyticky, například Lineární ODR n-tého řádu s nekonstantními koeficienty.

2 Řady

Děkuji modelářce Aničce za nasdílení následujících (vložených) matrošů.

2.1 Přejaté materiály od Aničky

1 Řady

1.1 Absolutní konvergence

Nutná podmínka konvergence: $\sum a_n < \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Srovnávací: $a_n \in \mathbb{R}, b_n \geq 0$, $|a_n| < b_n$ pak $\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

Srovnávací II: $a_n, b_n \geq 0$ a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall n \geq n_0$, pak $\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

Limitní srovnávací:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0;\infty)$, pak $\sum b_k < \infty \Leftrightarrow \sum a_n < \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pak $\sum b_k < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

$\lim\limits_{n\to 0} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pak $\sum b_k < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

Integrální: f spojitá, kladná, nerostoucí na $[a;\infty)$, pak $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f(n) < \infty \Leftrightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)dx < \infty$

Podílové: $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum a_n < \infty$

$\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada diverguje

Odmocninové: $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} < 1$, pak $\sum a_n < \infty$

$\liminf\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} > 1$, pak řada diverguje

Raabeho: $\liminf\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, pak $\sum a_n < \infty$

$\limsup\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, pak diverguje

Pozn.

- $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$
- $\sum q^n \to \frac{a_1}{1-q}$ pro $|q| < 1$ $|q| \geq 1$ řada diverguje
- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, pro $\alpha \leq 1$ diverguje, pro $\alpha > 1$ konverguje
- $\sum \frac{1}{n^p \cdot \ln^\alpha(n)}$, pokud $p > 1$, pak $\sum a_n < \infty$, pokud $p < 1$, pak diverguje, $p = 1, \alpha > 1$, pak $\sum a_n < \infty$, $p = 1, \alpha \leq 1$, pak diverguje
- $\sum\limits_1^N n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- aritmetická řada $\sum\limits_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$
- $\ln(n!) \leq n\ln(n)$
- odhad sinu ze shora $\sin(n) \leq n$, zespodu $\sin(n) \geq \sin^2(n)$
- z $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ odhad zeshora $1 - \cos(n) \leq n$

1.2 Neabsolutní konvergence

když $\sum |a_n| = \infty$ a $\sum a_n < \infty$

Leibnitzovo kritérium: $\sum(-1)^n a_n$, kde $\{a_n\}$ je nerostoucí, pak $\sum(-1)^n a_n < \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dirichletovo kritérium:$\sum a_n b_n$, kde $\{a_n\}$ je monotonní a $\to 0$, $\{b_n\}$ má omezené částečné součty, pak $\sum a_n b_n < \infty$

Abelovo kritérium: $\sum a_n b_n$, kde $\{a_n\}$ je monotonní omezená, $\sum b_n < \infty$, pak $\sum a_n b_n < \infty$

Pozn. $\sum \sin(an)/\cos(an)$ má omezené částečné součty pro $a \neq 2k\pi$ *Dk.:* $e^{ian} = \cos(an) + i\sin(an)$, *pak* $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{N} e^{ian} = \sum\limits_{n=1}^{N} \cos(an) + i\sin(an) \qquad |\sum(e^{ai})^n| = e^{ai}\frac{e^{ain}-1}{e^{ai}-1} < \infty$ *pro* $a \neq 2k\pi$

1.3 Mocninné řady

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, kde $\{a_n\}, z, z_0 \in \mathbb{C}$, je mocninná řada se středem v z_0

Poloměr mocninné řady: $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ pro $|z| < R$ řada konverguje, pro $|z| > R$ řada nekonverguje, pro $|z| = R$ nutno vyřešit (lze použít Moivreovu větu $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

Reálně analytická f-ce: na intervalu I je funkce, kterou na okolí každého $x_0 \in I$ můžeme popsat Taylorovou řadou

Sčítání řad: (1) převést na mocninnou řadu (2) podívat se, jak jde zderivovat/zintegrovat (3) použít Taylorovu řadu pro $e = \sum \frac{x^n}{n!}$ (4) může se vytknout x před sumu (5) u integrace nezapomenout na $+c$

2.2 Další důležité pojmy

2.2.1 Taylorova řada

$$f(x) \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2.2.2 Derivace člen po členu

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n\right)' \quad = \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}}_{\text{se stejným poloměrem } R}$$

2.2.3 Integrace člen po členu

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n\right) dz \;=\; \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot z^{n+1}}_{\text{se stejným poloměrem } R}$$

- -

2.3 Poznámky pod parou

(a) Vlastnost cosinu:

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

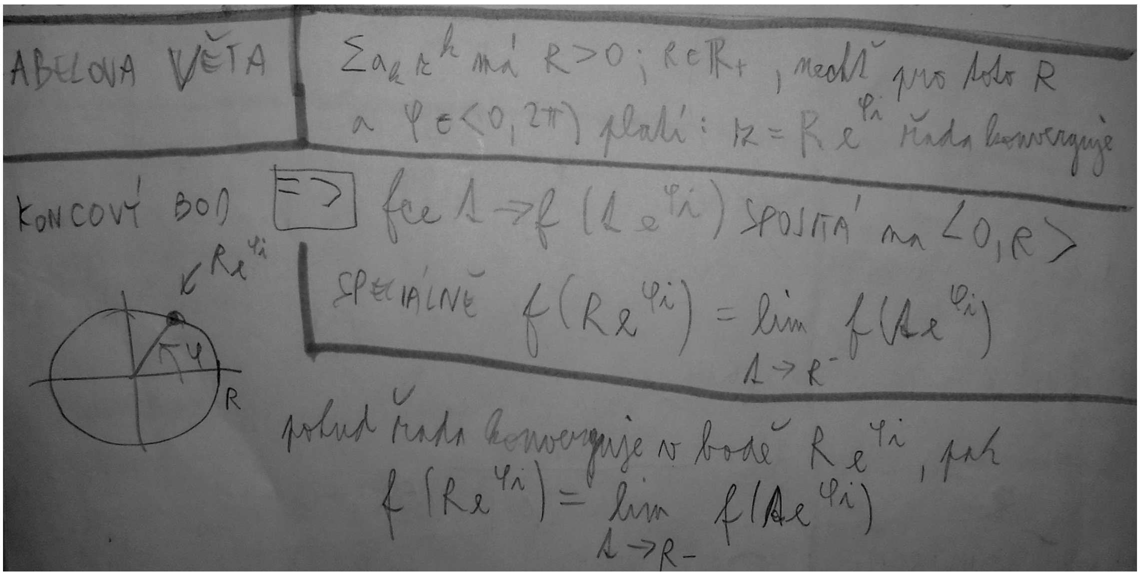
(b) Vlastnost sinu:

$$\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \quad \sim \quad \frac{\varphi}{n} \qquad \text{pro } n \to \infty$$

(c) Důležitý součet řady, v testu nutno odvodit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

(d) Abelova věta:



3 Funkce více proměnných

3.1 Výpočet limit více proměnných

Základní trick:

- převod do polárních souřadnic:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x = r \cdot \cos(\phi)$$
$$y = r \cdot \sin(\phi)$$

Pokud obecná limita neexistuje, blížíme se "po paprscích":

$$x \to 0, \quad y = 0 \text{ (položíme)}$$
$$y \to 0, \quad x = 0 \text{ (položíme)}$$
$$y = x$$

3.2 Parciální derivace

Řetízkové pravidlo:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_j}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(g)}{x_i}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a) \quad \text{pro } j \in \{1, \dots, n\}$$

Gradient:

$$\nabla f(a) = \left(\vec{f}(a),\ \cdot\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

Derivace v obecném směru:

$$\nabla f(a) \cdot \vec{v} = \left(\vec{f}(a),\ \vec{v}\right) = \left\langle \vec{f}(a),\ \vec{v} \right\rangle$$

3.3 Totální diferenciál

Někdy zkráceně zapisujeme:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x \quad \text{stejně jako} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y$$

Úloha s potenciálem:

POKUD

$$\partial_y M = \partial_x N \qquad \text{pro} \qquad M(x,y)dx + N(x,y)dy \ = \ 0$$

POTOM

$$\exists U(x,y) = 0 \qquad \text{(existuje potenciál } U)$$

Řešení úlohy s potenciálem:

$$dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$\begin{array}{llll} \longrightarrow & \partial_x U = M(x,y) & \Rightarrow & U_M = \int M(x,y)\,dx + C(y) \\ \longrightarrow & \partial_y U = N(x,y) & \Rightarrow & U_N = \int N(x,y)\,dy + D(x) \end{array}$$

Dále volíme $C(y)$ a $D(x)$ tak, aby $U_M = U_N = U$. Nakonec vyjádříme y vůči x nebo x vůči y.

Úprava na potenciál:

POKUD

$\partial_y M \neq \partial_x N$

POTOM

Musíme zavést integrační funkční faktor μ, pro který:

$$\mu(x,y): \qquad \partial_y(\mu M) = \partial_x(\mu N)$$

Stačí nám ale najít pouze jedno takové μ (existuje jich mnoho)

Zavedeme nový potenciál:

$$\mu \cdot M dx + \mu \cdot N dy = 0$$

Odsud:

$$\partial_y(\mu) \cdot M + \mu \cdot \partial_y(M) = \partial_x(\mu) \cdot N + \mu \cdot \partial_x(N)$$

Zvolíme závislost:

$$\mu(x) \quad \text{NEBO} \quad \mu(y)$$

Dostaneme:

$$\mu'(x) = \dots \qquad \text{resp.} \qquad \mu'(y) = \dots$$

Dále vyřešíme jako ODR a dostaneme :

$$\mu(x) = \dots \qquad \text{resp.} \qquad \mu(y) = \dots$$

A dále řešíme již jako úlohu s potenciálem.

4 Extrémy funkcí více proměnných

4.1 Lokální extrémy

(a) Funkci$f$ parciálně zderivujeme a položíme tyto derivace 0:

$$\partial_x f = 0$$

$$\partial_y f = 0$$

(b) Nalezneme ∀ stacionární body, kde jest gradient nulový:

$$\nabla f(a) = \vec{o}$$

(c) Sestavíme Hessovu matici druhých derivací:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f & \partial_x \partial_y f \\ \partial_y \partial_x f & \partial_y \partial_y f \end{pmatrix}$$

(d) Určíme její determinant (hessián)

Pokud je matice regulární, určíme její signaturu v dalším bodě.

Pokud je matice singulární, musíme zkoumat hlouběji (nevíme nic, krok (e) nemá pak smysl).

(e) Určíme její signaturu

- positivně definitní $\longrightarrow$ lokální MINIMUM
- negativně definitní $\longrightarrow$ lokální MAXIMUM
- indefinitní $\longrightarrow$ SEDLOVÝ BOD (= není to extrém)

4.2 Implicitní funkce

Cíl:

Vyjádřit implicitně zadanou funkci explicitně jako:

$$y = f(x) \quad \text{NEBO} \quad x = f(y)$$

Podmínky:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \ \text{ v bodě } a \qquad \wedge \qquad \frac{\partial F}{\partial y} \ \text{ spojitá na } U_a$$

POTOM

$$\exists y = f(x), \quad \text{ že } F(x, f(x)) = 0 \text{ na } U_a$$

Pro 3 souřadnice:

$$F(x,y,z)=0; \qquad z=f(x,y)$$

Podmínky:

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \ \text{ v } [a,b] \qquad \wedge \qquad \frac{\partial F}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y} \text{ spojité v } [a,b]$$

Vzoreček pro $\boldsymbol{\partial_x}$:

$$\partial_x\, f(a,b) = -\frac{\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial x}}{\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial z}}$$

Vzoreček pro $\boldsymbol{\partial_y}$:

$$\partial_x\, f(a,b) = -\frac{\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial y}}{\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial z}}$$

Vzoreček ve 2D:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot f'(x) = 0$$

4.3 Globální extrémy

Nejprve najdeme $\forall$ kandidáty na extrém.

Kandidáti na extrém:

(a) uvnitř množiny

(b) na hranici množiny

(a) Extrémy uvnitř množiny:

- hledáme $\forall$ stacionární body funkce f, tedy $\nabla f(x_1,\ldots,x_n)=0$

(b) Extrémy na hranici množiny:

- zkoumáme *vázané* extrémy funkce
- máme funkci $f(x_1,\ldots,x_n)$ s vazbou $g(x_1,\ldots,x_n)=0$
- vazba udává hranici množiny, nebo její část
- bod, kde se napojují vazby = automaticky kadidát na extrém

4.3.1 Lagrangeovy multiplikátory

Universální metoda hledání extrémů.

Znění věty:

Má-li funce f extrém v bodě $X = [x_1, \dots, x_n]$ **splňující** vazbu $g(x) = 0$

PAK $\Rightarrow$

i) $\nabla g(x) = 0$

ii) NEBO $\quad \exists \lambda \in \mathbb{R}\colon \quad \nabla L = \nabla(f + \lambda g) = 0$

Kandidáti na extrém:

i) $\nabla g = 0 \quad \wedge \quad g = 0$

ii) NEBO $\quad \nabla(f + \lambda g) = 0 \quad \wedge \quad g = 0$

Kandidáti na extrém při více vazbách:

i) $\nabla g_1, \dots, \nabla g_n$ lineárně závislé v x

ii) NEBO $\quad L = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \quad \longrightarrow \quad \nabla L = 0$ jsou kandidáti na extrém

Zjednodušení:

$$y = h(x), \quad \text{kde } h(x) \text{ jest funkce s "hezkými" derivacemi}$$

Pak využijeme tzv. dosazovací methody:

$$c(x) = f(x, h(x)) \quad \rightarrow \quad c'(x) = 0$$