
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

1. Zápočtová písemka 07. 11. 2016

(Celkově 20 bodů | Čas: 90 minut)

1. (10 bodů) Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{x^2 \theta^3}{2} \exp \{-\theta x\}, & \text{pro } x > 0; \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$$

- (a) Najděte odhad $\tilde{\theta}$ parametru $\theta > 0$ momentovou metodou. [1]
- (b) Vyšetřete nestrannost a konzistenci $\tilde{\theta}$. [3]
- (c) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$ parametru θ . [2]
- (d) Pomoci vlastnosti maximálně věrohodného odhadu odvozte konfidenční interval pro neznámý parametr θ pro $\alpha \in (0, 1)$. [2]
- (e) Pomoci CLV a transformace $g(\theta) = 1/\theta$ zkonstruuje přibližný 95%-ní interval spolehlivosti pro parametr θ . [2]

2. (6 bodů) Uvažujme náhodný výběr $Y_1, \dots, Y_n$ s hustotou

$$g(y) = \frac{3y^2}{\theta^3} 1_{(0, \theta)}(y), \quad y \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

- (a) Ověřte, že $\hat{\theta}_n = \frac{4}{3} \bar{X}_n$ je nestranný odhad parametru θ . [1]
- (b) Ověřte, že $\tilde{\theta}_n = \frac{3n+1}{3n} X_{(n)}$ je nestranný odhad parametru θ . [2]
- (c) Najděte rozptyl $\hat{\theta}_n$ a $\tilde{\theta}_n$ a porovnejte rychlost konvergence rozptylů k 0 při $n \rightarrow \infty$. [2]
- (d) Vyšetřete konzistenci odhadů $\tilde{\theta}_n$ a $\hat{\theta}_n$. [1]

3. (4 bodů) Necht' $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_1 > 0$ a $Y_1, \dots, Y_m$ je náhodný výběr z Exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_2 > 0$ a je nezávislý na prvním výběru. Pro $\alpha \in (0, 1)$ odvozte přesný $100(1 - \alpha)\%$ konfidenční interval pro parametr $\theta = \lambda_1/\lambda_2$. [5]