

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2

Matematicko-fyzikální fakulta UK, letní semestr 2025-26

Termín číslo 1, 3. 6. 2026

1. Je dána funkce

$$f(x) = \log(\cos x) \cdot e^{\sin x}.$$

Nalezněte Taylorův polynom 4. řádu funkce f v bodě 0. Pomocí získaného rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x) \cdot e^{\sin x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3}{x^4}$$

(15 bodů)

2. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 2} \right)^{-n^3}.$$

(15 bodů)

3. Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos x)^2} dx.$$

Zdůvodněte použití věty o substituci.

(15 bodů)

4. Necht $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je spojitá funkce. Uvažujte následující tvrzení.

- (1) Newtonův integrál $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje.
- (2) Newtonův integrál $\int_0^{\infty} f^2(x) dx$ konverguje.
- (3) Newtonův integrál $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ konverguje.

Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí. Uveďte vždy důkaz platnosti implikace nebo protipříklad. Můžete používat věty z přednášek.

- (a) (2) $\Rightarrow$ (1)
- (b) (1) $\Rightarrow$ (2)
- (c) (1) $\Rightarrow$ (3)

(15 bodů)

Řešení úloh

Úloha číslo 1. Je dána funkce

$$f(x) = \log(\cos x) \cdot e^{\sin x}.$$

Nalezněte Taylorův polynom 4. řádu funkce f v bodě 0. Pomocí získaného rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x) \cdot e^{\sin x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3}{x^4}$$

Řešení.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pro kosinus platí:} \\ \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \\ \text{Platí } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0 \text{ a pro každé } x \in P(0, \frac{1}{2}\pi) \text{ platí } \cos x - 1 \neq 0. \text{ Dosadíme do rozvoje} \\ \text{logaritmu } \log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \quad y \rightarrow 0 \text{ a podle Věty 6.7 dostaneme} \\ \log(\cos x) = \log(1 + \cos x - 1) \\ = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o((\cos x - 1)^2) \\ \stackrel{\text{Věta 6.6(iii)}}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4). \\ \text{Pro sinus a exponenciálu platí:} \\ \sin x = x + o(x^2), \quad x \rightarrow 0, \\ e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \quad y \rightarrow 0. \\ \text{Platí } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \text{ a pro každé } x \in P(0, \frac{1}{2}\pi) \text{ platí } \sin x \neq 0. \text{ Odtud dostáváme podle Věty 6.7} \\ \text{a Věty 6.6(iii)} \\ e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0. \\ \text{Nyní oba rozvoje vynásobíme:} \\ f(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right) \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \\ \text{Taylorův polynom 4. řádu v bodě 0 má tedy tvar} \\ T_4^{f,0}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4. \\ \text{Dosazením tohoto rozvoje do zadané limity dostáváme:} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Úloha číslo 2. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 2} \right)^{-n^3}.$$

Řešení:

^{2b} { Členy řady $a_n = \left(\frac{n^2+5}{n^2+2} \right)^{-n^3}$ jsou kladné.

^{3b} { Použijeme Cauchyovo odmocninové kritérium a vyšetříme limitu:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 2} \right)^{-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2 + 2} \right)^{-n^2}.$$

^{2b} { Výraz přepíšeme do exponenciálního tvaru $e^{V(n)}$, kde:

$$V(n) = -n^2 \cdot \log \left(1 + \frac{3}{n^2 + 2} \right).$$

^{3b} { Limitu v exponentu spočteme pomocí známé limity $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ a věty o limitě složené funkce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-n^2 \cdot \frac{3}{n^2 + 2} \cdot \frac{\log \left(1 + \frac{3}{n^2 + 2} \right)}{\frac{3}{n^2 + 2}} \right) = -3 \cdot 1 = -3.$$

^{2b} { Díky spojitosti exponenciální funkce dostáváme $L = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$.

^{3b} { Protože $L < 1$, zadaná řada podle odmocninového kritéria konverguje.

Úloha číslo 3. Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos x)^2} dx.$$

Zdůvodněte použití věty o substituci.

Řešení:

Použijeme substituci $\varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ na intervalu $(-\pi, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Na uvedeném intervalu platí

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2 \cos^2(\frac{x}{2})}.$$

Označíme-li $z = \varphi(x)$, pak platí

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Integrand pak můžeme psát ve tvaru

$$\frac{1}{(2 + \cos x)^2} = \frac{1}{(2 + \frac{1 - \varphi(x)^2}{1 + \varphi(x)^2})^2} \cdot \frac{2}{1 + \varphi(x)^2} \cdot \varphi'(x).$$

Odtud plyne, že podle první věty o substituci stačí spočítat

$$\int \frac{1}{(2 + \frac{1 - z^2}{1 + z^2})^2} \cdot \frac{2}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{(\frac{3 + z^2}{1 + z^2})^2} \cdot \frac{2}{1 + z^2} dz = \int \frac{2(1 + z^2)}{(3 + z^2)^2} dz.$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{2(1 + z^2)}{(3 + z^2)^2} = \frac{2(3 + z^2 - 2)}{(3 + z^2)^2} = \frac{2}{3 + z^2} - \frac{4}{(3 + z^2)^2}.$$

Nyní integrujeme oba členy na $\mathbb{R}$ zvlášť.

První člen:

$$\int \frac{2}{3 + z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\frac{z}{\sqrt{3}}), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Druhý člen integrujeme pomocí rekurentního vzorce pro $\int \frac{1}{(1 + z^2)^2} dz$.

$$\int \frac{4}{(3 + z^2)^2} dz = \frac{2z}{3(3 + z^2)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\frac{z}{\sqrt{3}}), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Odečtením obou integrálů dostáváme primitivní funkci

$$G(t) = (\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}) \operatorname{arctg}(\frac{z}{\sqrt{3}}) - \frac{2t}{3(3 + z^2)} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\frac{z}{\sqrt{3}}) - \frac{2z}{3(3 + z^2)}.$$

Návratem k původní proměnné x získáváme funkci $F(x) = G(\operatorname{tg} \frac{x}{2})$:

$$F(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}) - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{3(3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}.$$

Integrační obor rozdělíme na dva podintervaly. Na každém z nich je F primitivní k integrované funkci. Dopočteme určitý integrál:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Úloha číslo 4. Necht $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je spojitá funkce. Uvažujte následující tvrzení.

- (1) Newtonův integrál $\int_0^\infty f(x) dx$ konverguje.
- (2) Newtonův integrál $\int_0^\infty f^2(x) dx$ konverguje.
- (3) Newtonův integrál $\int_0^\infty \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ konverguje.

Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí. Uveďte vždy důkaz platnosti implikace nebo protipříklad. Můžete používat věty z přednášek.

- (a) (2) $\Rightarrow$ (1)
- (b) (1) $\Rightarrow$ (2)
- (c) (1) $\Rightarrow$ (3)

Řešení:

5 b { (a) *Implikace neplatí.* Uvažujme funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0, \infty)$. Funkce je na $[0, \infty)$ spojitá a nezáporná. Integrál pro (2) konverguje: $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^\infty = 1$. Avšak integrál pro (1) diverguje: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^\infty = \infty$.

5 b { (b) *Implikace neplatí.* Sestrojíme funkci f tak, že položíme $f(0) = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, definujeme $f(n) = n$, $f(n - \frac{1}{n^3}) = f(n + \frac{1}{n^3}) = 0$ a dále je funkce dodefinována afinně. Graf je nekonečnou posloupností trojúhelníkových hrotů. Plocha jednoho hrotu (integrál přes interval $[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}]$) je rovna $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n^2}$. Integrál $\int_0^\infty f(x) dx = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje, tvrzení (1) tedy platí.
Pro druhou mocninu $f^2(x)$ budou mít hroty stejnou základnu $\frac{2}{n^3}$, ale výšku n^2 a nepjde o trojúhelníky. Integrál jednoho hrotu u f^2 bude $\frac{2}{3n}$. Jelikož řada $\sum_{n=2}^\infty \frac{2}{3n}$ diverguje, integrál $\int_0^\infty f^2(x) dx$ diverguje a (2) neplatí.

5 b { (c) *Implikace platí.* Pro každé $x \in [0, \infty)$ platí
$$0 \leq \frac{f(x)}{1+x^2} \leq f(x).$$

Podle srovnávacího kritéria $\int_0^\infty \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ konverguje.