

Metoda konečných prvků

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí a uvažujme jako modelový příklad Poissonovu rovnici s homogenními Dirichletovými podmínkami, tj.

$$(1) \quad -\Delta u = f \quad \text{v } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

V klasické teorii PDR předpokládáme, až $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Můžeme tedy také alespoň $f \in C(\Omega)$. To jsou velmi silné předpoklady, které v aplikacích nemůžeme být splněny. Zavedeme proto jinou formulaci řešení, která nevyžaduje tak vysokou regularitu řešení a dat.

Tuto tzv. slabou formulaci získáme tak, že PDR z (1) přepisujeme jako $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$, integrujeme přes Ω a aplikujeme Greenovu větu. Tuto zpisujeme získáme

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Vidíme, že uvedené integrály mají smysl pro $u, v \in H^1(\Omega)$ a $f \in L^2(\Omega)$. Pro řešení a pro testovací funkce v můžeme tedy uvažovat prostor $V \equiv H_0^1(\Omega)$. Řekneme tedy, že u je slabé řešení problému (1), jestliže $u \in V$ a

$$(2) \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

kde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Všimněme si, že

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega},$$

$$a(u, u) = \|u\|_{1, \Omega}^2,$$

$$|\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_{0, \Omega} \|v\|_{0, \Omega} \leq C \|f\|_{0, \Omega} \|v\|_{1, \Omega} \quad (\text{pomocí Friedrichsovy nerovnosti})$$

Jelikož $\|\cdot\|_{1, \Omega}$ je norma na V , je a spojitá V -eliptická bilineární forma a f je spojitý lineární funkcional na V . Protože V je Hilbertův prostor. Úloha (2) má právě jedno řešení. Každé klasické řešení je také slabé řešení a je-li slabé řešení dostatečně hladké, je to také klasické řešení.

Analogicky jako pro problém (1) lze postupovat i pro jiné lineární eliptické PDR 2. řádu (resp. i vyššího maticového řádu) a definovat jejich slabé řešení s rozdílnými Dirichletovými podmínkami.

MKP2

proto řešení úlohy (2), kde a je vhodná bilineární forma, f lineární
 funkcional a V vhodný lineární prostor. Často lze ukázat, že a, f a
 V mají kromě obecné vlastnosti jako v případě úlohy (1). Zavedeme
 proto následující

Abstraktní variační problém (AVP)

Hledáme $u \in V$ takové, že

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

kde V je ^{reálný} Hilbertův prostor s normou $\|\cdot\|_V$,

$a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma, která je spojitá

a V -eliptická:

$$\exists M, \alpha > 0: |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$$

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

a f je spojitý lineární funkcional na V .

Lax-Milgramova lemma Abstraktní variační problém má právě jedno řešení.

Důkaz: Necht $(\cdot, \cdot)$ značí skal. součin na V . Podle Rieszovy věty o reprezentaci $\exists! F \in V$
 tak, že $(F, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$. Podobně $\forall u \in V \exists! Au \in V$ tak, že $(Au, v) = a(u, v)$
 $\forall v \in V$, neboť $a(u, \cdot) \in V'$. Zřejmě $A: V \rightarrow V$ je lineární; navíc $\|Au\|_V^2 = a(u, Au) \leq M \|u\|_V \|Au\|_V$
 tj. $\|Au\|_V \leq M \|u\|_V$. (Teď A je spojitý a $\|A\|_{\mathcal{L}(V, V)} \leq M$.) Řešení abstraktního variačního
 problému je tedy ekvivalentní řešení rovnice $Au = F$. Buď $\rho > 0$ a definujme
 zobrazení $T_\rho: V \rightarrow V$ vztahem $T_\rho u = u - \rho(Au - F)$. Pak $Au = F \Leftrightarrow T_\rho u = u$,
 tj. u je pevným bodem zobrazení T_ρ . Podívej-li se na něj ρ , pro něj T_ρ je
 kontrahující bodem (neboť kontrahující zobrazení má právě jeden pevný bod).
 Pak $\|u - \rho(Au - F)\|_V^2 = \|u\|_V^2 - 2\rho \underbrace{(Au, u)}_{a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2} + \rho^2 \|Au\|_V^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) \|u\|_V^2$
 Vidíme, že $(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) < 1 \Leftrightarrow \rho \in (0, \frac{2\alpha}{M^2})$. $\square$

Pozn. Z předchozího důkazu plyne, že zobrazení $A: V \rightarrow V$ je na. Jeliž
 $\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{V'} \|u\|_V$,

$$\text{je} \quad \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}$$

a zobrazení A má spojitou inverzi A^{-1} splňující $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V, V)} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Abstraktní variační problém je tedy řešitelný v tom smyslu, že jeho řešení existuje,
 je jednoznačné a spojitě závislé na datech f .

Yosida: $u_1, u_2 \in V$ řešením odpovídající pravé straně $f_1, f_2 \in V'$, pak

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|_{V'}.$$

Věta Necht bilineární forma a z ~~abstraktního~~ ^{AVP} variačního problému je symetrická. Pak řešení ~~abstraktního~~ ^{AVP} problému je ekvivalentní minimizaci kvadratického funkálu

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle.$$

Důkaz: Necht u je řešením AVP. Pak pro lib. $v \in V$ je

$$J(u+v) = \frac{1}{2} a(u, u) + \underline{a(u, v)} + \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, u \rangle - \underline{\langle f, v \rangle} = J(u) + \frac{1}{2} a(v, v).$$

Teď $J(v) > J(u) \quad \forall v \in V, v \neq u$. Teď u je jediné řešení úlohy $J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$. $\square$

Obvyklým postupem při aproximaci řešení AVP je použití Galerkinovy metody, která spočívá v definování podobných problémů v konečně dimenzionálních podprostorech prostoru V . Přemě: každému konečně dimenzionálnímu podprostoru V_h prostoru V přiřadíme diskrétní problém nalézt $u_h \in V_h$ tak, že

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

Podle Lax-Milgramova lemmatu má každý takto problém právě jedno řešení u_h , které nazýváme diskrétní řešení. Je-li bilineární forma a symetrická, pak lze diskrétní řešení též charakterizovat vlastností (viz věta výše)

$$J(u_h) = \inf_{u_h \in V_h} J(u_h).$$

Tato alternativní definice diskrétního řešení je známá jako Ritzova metoda.

Označme-li $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ bázi prostoru V_h , pak $u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j$, k určení diskrétního řešení nám tedy stačí spočítat vektor $U = (u_1, \dots, u_N)^T$. To lze snadno. Pro $i=1, \dots, N$ platí

$$\langle f, \varphi_i \rangle = a(u_h, \varphi_i) = \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) u_j.$$

Definujeme-li vektor $F = (\langle f, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle f, \varphi_N \rangle)^T$ a matici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$, kde $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, pak

$$AU = F.$$

Pro libovolný vektor $V \in \mathbb{R}^N$ je $V^T A V = \sum_{i,j=1}^N v_i a_{ij} v_j = a(\sum_{i=1}^N \varphi_i v_i, \sum_{j=1}^N \varphi_j v_j) \geq \alpha \|\sum_{i=1}^N \varphi_i v_i\|_V^2 > 0$ pro $V \neq 0$. Teď matice A je ^{symetrická} pozitivně definitní. Je-li bilineární forma a symetrická, je též A symetrická. Vidíme tedy, že na rozdíl od řešení AVP jsme schopni diskrétní řešení vždy vypočítat, a to pomocí vhodné iterativní metody.

V metodě konečných prvků se matice A obvykle nazývá matice stálosti, což vychází z aplikace v elasticitě.
 to je vel. důležité pro um. řešení systémů $AU=F$. V metodě kon. dif. to obvykle vypadá, jako obvyklé speciální symetrické, bází. ověřit, že matice

V dalším budu předpokládat, že AVP představuje slabou formulaci nějaké dvojité úlohy pro nějakou lineární eliptickou PDR druhého popř. čtvrtého řádu definované na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s lipshitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. To znamená, že prostor V je podprostorem nějakého Sobolevova prostoru např. $H^1(\Omega)$ nebo $H^2(\Omega)$.

Metoda konečných prvků je ve své nejjednodušší formě pouze jistý speciální postup konstrukce podprostorů V_h , které se nazývají prostory konečných prvků. Tato konstrukce je charakterizována třemi základními ^{apriorní} výrazy, které označujeme (MKP1), (MKP2), (MKP3).

(MKP1) První základní a jistě nejcharakterističtější výcem je, že množina $\bar{\Omega}$ se rozdělí na konečné mnoho podmnožin T , které tvoří množinu T_h zvanou triangulace oblasti Ω a mají následující vlastnosti:

(T_h1) Každá množina $T \in T_h$ je uzavřená a její vnitřek je neprázdný a souvislý.

(T_h2) Hranice ∂T každé množiny $T \in T_h$ je lipshitzovsky spojitá.

(T_h3) $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in T_h} T$.

(T_h4) Průnik vnitřků libovolných dvou různých množin z T_h je prázdný.

Pozn. Prodeji: Zavedeme ještě podmínku (T_h5) týkající se sousedních množin T .

Nechť T_h je nějaká triangulace oblasti Ω . Naším cílem je zkonstruovat konečné dimenzionální prostor aproximující prostor V . Nechť X_h je libovolný konečný dim. prostor f definovaný na $\bar{\Omega}$ a označme

$$P_T = \{v_h|_T; v_h \in X_h\}, \quad T \in T_h.$$

Zajímá nás, za jakých podmínek platí $X_h \subset H^1(\Omega)$ nebo $X_h \subset H^2(\Omega)$.

Věta Nechť $P_T \subset H^1(T) \quad \forall T \in T_h$ a $X_h \subset C(\bar{\Omega})$. Pak platí

$$X_h \subset H^1(\Omega), \quad X_{0h} \equiv \{v_h \in X_h; v_h = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \subset H_0^1(\Omega),$$

Pozn. Pro jednoduchost píšeme $H^1(T)$ místo správnějšího $H^1(\text{int } T)$.

Důkaz: Bude $v \in X_h$. Jelikož $X_h \subset C(\bar{\Omega})$ je $v \in L^2(\Omega)$. Abychom dokázali, že $v \in H^1(\Omega)$, stačí najít $f_{v,i} \in L^2(\Omega)$ tak, že

$$\int_{\Omega} v_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} v \varphi_{x_i} \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Položíme $v_i|_T = (v|_T)_{x_i}$. Díky (G2) můžeme na každém T použít Greenovu

$$\text{větu: } \int_T v_i \varphi \, dx = \int_T (v|_T)_{x_i} \varphi \, dx = - \int_T v|_T \varphi_{x_i} \, dx + \int_{\partial T} v|_T \varphi n_{\partial T, i} \, d\sigma,$$

kde $n_{\partial T, i}$ je i -tá složka ^{normálního} normálního vektoru k ∂T . Pomocí této přičítáme přes všechny T získáme

$$\int_{\Omega} v_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} v \varphi_{x_i} \, dx + \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v \varphi n_{\partial T, i} \, d\sigma}_{=0 \text{ } (\varphi=0 \text{ na } \partial\Omega, \text{ přičtení přilehlých elementů je 0})}$$

$$\text{Jelikož } H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v=0 \text{ na } \partial\Omega\}, \text{ máme } (e, 0)$$

je stejné i $X_{0h} \subset H_0^1(\Omega)$. $\square$

Podobně se dokaže následující věta:

Věta Necht' $P_T \subset H^2(T)$ $\forall T \in \mathcal{T}_h$ a $X_h \subset C^1(\bar{\Omega})$. Pak

$$X_h \subset H^2(\Omega), \quad X_{0h} \equiv \{v_h \in X_h; v_h=0 \text{ na } \partial\Omega\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$X_{00h} \equiv \{v_h \in X_h; v_h = \partial_\nu v_h = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \subset H_0^2(\Omega).$$

Druhý základní výsledek MKP je, že

(MKP2) Prvky P_T , $T \in \mathcal{T}_h$, obsahují polynomy nebo alespoň funkce, které jsou "blízké" polynomům.

Tento předpoklad je klíčový ke všem výsledkům o konvergenci a umožňuje rovněž jednoduchý výpočet koeficientů matic hmotnosti. Připomeňme, že prvky této matice jsou

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ je báze prvků V_h . Z hlediska praktické realizace je důležitá, aby co nejvíce prvky první matice bylo symetrických, tj. aby matice byla reálná.

V úvodu této přednášky bylo uvedeno, že bilineární forma je obecně symetrická, tj.

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Tedy $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$, zejména $\text{meas}(\text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j) = 0$. Totéž platí pro bilineární formy pocházející z řady fyzikálních slabých formulací. Postupujeme proto

(MKP3) Existuje alespoň jedna "kanonická" báze prvků V_h , jejíž bázeové funkce mají "malé" nosiče, přičemž lze tyto bázeové funkce snadno popsat.

Pozn. Důležitá matice hmotnosti je důležitá jednak proto, že taková matice zabere méně paměti počítače a jednak proto, že vektoru matice bude vyžadovat méně operací, a tedy kratší výpočetní čas.

Existují obecnější varianty metod konečných prvků:

- 1) lze použít obecnější variační problémy, jako variační nerovnosti, různé smíšené nebo hybridní formulace či hraniční formulace (boundary element method, BEM).
- 2) prostor V_h nemusí být podprostorem prostoru V :
 - a) hranice oblasti Ω je křivá a oblast Ω je proto aproximována oblastí Ω_h s vhodnějšími hranicemi.
 - b) funkce mají např. nespojitosti na rovinách mezi přilehlými elementy triangulace.
- 3) bilineární forma a lineární funkcionál jsou aproximováni, např. tak, že pro jejich výpočet je použita numerická integrace.
- 4) do diskretizovaného problému jsou zaváděny další členy, které závisejí na triangulaci a mají stejnou vlastnost diskretizovaného řešení.

Modifikace Galerkinovy metody popsané v bodech 2) a 3) se většinou nazývají variační zločiny.

Tři základní typy MKP zůstávají ve své podstatě zachovány i pro tyto zmiňované obecnější verze metod konečných prvků.

Metoda konečných prvků, která odpovídá čisté Galerkinově metodě, (tj. $V_h \subset V$ a bilineární forma a lineární funkcionál se právě stejně v diskretizovaném problému jsou stejné jako ve variační formulaci) se nazývá konformní metoda konečných prvků.

Příklady konečných prvků definovaných na simplexech

$P_k = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \gamma_\alpha x^\alpha; \gamma_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$... prostor polynomů stupně $k \geq 0$ na $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

$\dim P_k = \binom{n+k}{k}$ (dužas !)

Pro libovolnou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}^n$ označme $P_k(A) = \{p|_A; p \in P_k\}$.

Má-li A neprázdný vnitřek, je $\dim P_k(A) = \dim P_k$.

$$\dim P_2 = \binom{m+2}{2} = \binom{m+2}{m}. \text{ Check ideal, se card } \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}^m; |\alpha| \leq k \right\} = \binom{m+2}{m}. \quad 1$$

Inductiv p[er]es m : pro $m=1$ to [?] [?] [?]. Necht' to [?] [?] [?] pro $m=1, \dots, N$. Uka[?]e, [?] [?] [?] to [?] [?] [?] pro $m=N+1$. [?] [?] [?] $\text{card} \{ \alpha \in \mathbb{Z}^{N+1}; |\alpha| \leq k \} = \sum_{i=0}^k \text{card} \{ \alpha \in \mathbb{Z}^{N+1}; |\alpha| \leq k, \alpha_{N+1}=i \}$
 $= \sum_{i=0}^k \text{card} \{ \alpha \in \mathbb{Z}^N; |\alpha| \leq k-i \} = \sum_{i=0}^k \binom{N+2-i}{N} = \binom{N}{N} + \binom{N+1}{N} + \dots + \binom{N+2}{N} =$

$$\text{PRIME} \stackrel{\text{Bartsch}}{=} \binom{N+1+2}{N+1}.$$

Nechť $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, $a_j = (a_{ij})_{i=1}^n$, jsou body v $\mathbb{R}^n$ takové, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(Body jsou obrazy v n-rozměru, jestliže $\exists a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, ne všechny nulové, tak, že $\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} a_j = -a_{i,n+1}$, $i=1, \dots, n$.)

je invertibilní, což je ekvivalentní tomu, že tyto body nejsou obrazy v n-rozměru.

Nechť T je konvexní obal bodů $a_1, \dots, a_{n+1}$, tj.

$$T = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j; \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad j=1, \dots, n+1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Pak T se nazývá n -simplex v $\mathbb{R}^n$ a body $a_1, \dots, a_{n+1}$ se nazývají vrcholy n -simplexu.

Pr. $n=1 \Rightarrow T$ je uzavřený interval, $n=2 \Rightarrow T$ je trojúhelník, $n=3 \Rightarrow T$ je čtyřstěn.

Pro libovolné $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ je m -stěna n -simplexu T libovolný m -simplex, jehož $(m+1)$ vrcholů patří mezi vrcholy T . $(n-1)$ -stěna se nazývá jednoduchá stěna a 1-stěna se nazývá hrana nebo strana.

Barycentrické souřadnice $\lambda_j = \lambda_j(x)$, $j=1, \dots, n+1$, libovolného bodu $x \in \mathbb{R}^n$ vzhledem k vrcholům $a_1, \dots, a_{n+1}$ jsou definovány vztahy

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j = x, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1,$$

což lze zapsat ve tvaru

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož A je regulární, jsou barycentrické souřadnice definovány jednoznačně a vždy existují. Platí

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j + b_{i,n+1}, \quad i=1, \dots, n+1,$$

kde $B = (b_{ij})$ je inverzní matice k A . Platí tedy

$$\lambda_i \in P_1, \quad i=1, \dots, n+1,$$

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad i,j=1, \dots, n+1.$$

Tyto dvě vlastnosti funkce λ_i rovněž jednoznačně definují.

Následující věta má zásadní význam pro konstrukci prostorů lineárních prvků na simplexech

Věta Necht T je n -simplex v $\mathbb{R}^n$ s vrcholy $a_1, \dots, a_{n+1}$. Pro lib. $k \geq 1$

označme

$$L_k(T) = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j; \lambda_j \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{k-1}{2}, 1 \right\}, j=1, \dots, n+1, \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Pak platí

1) $M_{n,k} \equiv \text{card}(L_k(T)) = \dim P_k$.

2) Označme-li $z_1, \dots, z_{M_{n,k}}$ prvky množiny $L_k(T)$, pak existuje báze

$p_1, \dots, p_{M_{n,k}}$ prostoru P_k splňující

$$p_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, M_{n,k}.$$

3) Libovolný polynom $p \in P_k$ je jednoznačně určen svými hodnotami na množině $L_k(T)$ a platí $p = \sum_{i=1}^{M_{n,k}} p(z_i) p_i$.

Důkaz. Množiny $L_k(T)$ se nazývají hlavní mřížka (principal lattice) řádu k n -simplexu T .

Necht T je trojúhelník. Pak $L_1(T) = \triangle$ $L_2(T) = \triangle$ $L_3(T) = \triangle$ atd.

Důkaz: Bod 3) je přímý důsledek 2). Stačí tedy ukázat 1) a 2).

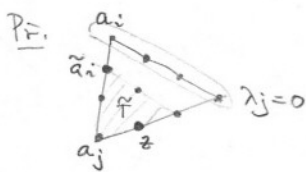
① Uvažujeme nejprve případ $n=1$. Pak $L_k(T) = \left\{ x_j = \frac{j a_1 + (k-j) a_2}{k}; j=0, \dots, k \right\}$.

Tedy $\text{card } L_k(T) = k+1 = \dim P_k$. Jelikož $\lambda_1(x_j) = \frac{j}{k}$, pak $p_i(x) = \frac{1}{\alpha_i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \left(\lambda_1(x) - \frac{j}{k} \right)$,
kde $\alpha_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{i-j}{k}, \quad i=1, \dots, M_{1,k}.$

Předp. uvaž. že $n > 1$.

② Nyní doložíme následující tvrzení: pro libovolný bod $z \in L_k(T)$ existuje n -simplex $\tilde{T}$ a fce $\tilde{p} \in P_1$ tak, že

$$z \in L_{k-1}(\tilde{T}) \subset L_k(T), \quad \tilde{p}(z) = 1 \quad \text{a} \quad \tilde{p}(y) = 0 \quad \forall y \in L_k(T) \setminus L_{k-1}(\tilde{T}).$$



Víme, že $\lambda_j(z) \neq 0$ pro nejvýše jedno $j \in \{0, \dots, n+1\}$. Bůhu můžeme přičkat,
že $j = n+1$. Označme $\tilde{L}_k(T) = \{x \in L_k(T); \lambda_{n+1}(x) \neq 0\}$. Pak

$$x \in \tilde{L}_k(T) \Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \quad \lambda_{n+1} \in \left\{ \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}$$

$$\lambda_j \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-2}{k}, \frac{k-1}{k} \right\}, j=1, \dots, n, \quad \lambda_{n+1} \in \left\{ \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}$$

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{k \lambda_j}{k-1} \in \left\{ 0, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{k-2}{k-1}, 1 \right\}, j=1, \dots, n, \quad \tilde{\lambda}_{n+1} = \frac{k \lambda_{n+1} - 1}{k-1} \in \left\{ 0, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{k-2}{k-1}, 1 \right\}$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{k-1}{k} \tilde{\lambda}_j a_j + \frac{a_{n+1}}{k} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j \frac{(k-1)a_j + a_{n+1}}{k}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j = \frac{k}{k-1} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j - \frac{1}{k-1} = 1, \quad \tilde{\lambda}_j \in \left\{ 0, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{k-2}{k-1}, 1 \right\}$$

Snadno se ukáže, že body $\tilde{a}_j = \frac{(j-1)a_j + a_{n+1}}{j}$, $j = 1, \dots, n+1$, definují n -simplex (stačí ukázat, že $\det \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \dots & \tilde{a}_{n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \neq 0$). Věnujme si, že $\tilde{a}_{n+1} = a_{n+1}$.

Označme-li tento n -simplex $\tilde{T}$, pak existuje, že $L_2(T) = L_{2-1}(\tilde{T})$.

Funkce $\tilde{p}(x) = \lambda_{n+1}(x) / \lambda_{n+1}(z)$ má požadované vlastnosti.

Vidíme navíc, že $L_2(T) \setminus L_{2-1}(\tilde{T}) = L_2(\tilde{\tilde{T}})$, kde $\tilde{\tilde{T}}$ je $(n-1)$ -simplex definovaný body $a_1, \dots, a_n$.

- ③ Bud' $z \in L_2(T)$. Nyní ukážeme, že existuje $p \in P_2$ tak, že $p(z) = 1$ a $p(y) = 0$ $\forall y \in L_2(T) \setminus \{z\}$. Označme $T_2 \equiv T$. Podle ② existuje posloupnost n -simplexů $T_{2-1}, T_{2-2}, \dots, T_1$ a funkcí $p_{2-1}, p_{2-2}, \dots, p_1 \in P_1$ tak, že platí pro $i = 1, \dots, 2-1$

$$z \in L_i(T_i) \subset L_{i+1}(T_{i+1}), \quad p_i(z) = 1 \quad \text{a} \quad p_i(y) = 0 \quad \forall y \in L_{i+1}(T_{i+1}) \setminus L_i(T_i).$$

Nechť $p_0 \in P_1$ splňuje $p_0(z) = 1$ a $p_0(y) = 0 \quad \forall y \in L_1(T_1) \setminus \{z\}$. Pak

$$p = \prod_{i=0}^{2-1} p_i.$$

Pak $p \in P_2$, $p(z) = 1$ a $p(y) = 0 \quad \forall y \in L_2(T) \setminus \{z\}$.

- ④ Zbývá doložit 1). Podle 2) máme, že $L_2(T) = L_{2-1}(\tilde{T}) \cup L_2(\tilde{\tilde{T}})$, kde $\tilde{T}$ je n -simplex, $\tilde{\tilde{T}}$ je $(n-1)$ -simplex a $\tilde{T} \cap \tilde{\tilde{T}} = \emptyset$. Tedy
- $$M_{n,2} = M_{n,2-1} + M_{n-1,2} \Rightarrow M_{n,2} = M_{n,1} + \sum_{j=2}^2 M_{n-1,j}.$$
- Ještě platí $M_{1,2} = 2+1 = \dim P_2(\mathbb{R}^1)$, $M_{n,1} = n+1 = \dim P_1(\mathbb{R}^n)$. Tedy
- $$M_{2,2} = 3 + \sum_{j=2}^2 M_{1,j} = 3 + \sum_{j=2}^2 (j+1) = 3 + \sum_{j=3}^{2+1} j = \sum_{j=1}^{2+1} j = \frac{(2+1)(2+2)}{2} = \binom{2+2}{2} = \dim P_2(\mathbb{R}^2).$$
- Dále vidíme. Tedy necht' pro libovolný n platí
- $$M_{n,2} = \binom{n+2}{n} \quad \forall n \geq 1.$$

Pak

$$M_{n+1,2} = M_{n+1,1} + \sum_{j=2}^2 M_{n,j} = n+2 + \sum_{j=2}^2 \binom{n+j}{n} = \sum_{j=0}^2 \binom{n+j}{n} = \binom{n+2+1}{n+1} = \binom{n+1+2}{2}.$$

Nyní můžeme definovat konkrétní prvek zvaný n -simplex stupně 2:

$$(1) \begin{cases} T = n\text{-simplex s vrcholy } a_1, \dots, a_{n+1}, \\ P_T = P_2(T), \\ \Sigma_T = \{p(z); z \in L_2(T)\} \dots \text{ množina stupně volnosti, } f_j. \end{cases}$$

množina parametrů, které jednoznačně definují funkce z prostoru P_T .

Konkrétní příklady konečných prvků (T, P_T, Σ_T) definovaných uvedly —
způsobem uvedeným včetně vztahů pro báze funkce uvedeny na cvičení.

Uvidíme, že lze definovat také konečné prvky, kde

$$(2) \begin{cases} T = n\text{-simplex}, \\ P_T \subset P_2(T), \text{ ale } P_T \neq P_2(T) \\ \Sigma_T = \{p(z); z \in M_2(T)\}, \text{ kde} \end{cases}$$

$M_2(T) \subset L_2(T)$ je lokální množina, že body v bodech $z \in M_2(T)$ jednoznačně
určují funkce z prostoru P_T a navíc

$$(3) \begin{cases} \text{pro každou} \text{ } F \text{ } n\text{-simplexem } T, m \in \{0, \dots, n\}, \\ \text{body v bodech } M_2(T) \cap F \text{ jednoznačně určují funkce} \\ \text{z prostoru } P_T|_F. \end{cases}$$

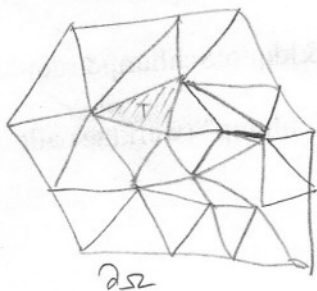
V případě $P_T = P_2(T)$ a $M_2(T) = L_2(T)$ tato vlastnost ihned plyne
z věty o $L_2(T)$, neboť $P_2(T)|_F = P_2(F)$ a $L_2(T) \cap F = L_2(F)$.

Nyní si uvědomme, jak lze pomocí uvedených konečných prvků definovat
prostory konečných prvků. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s Lipschitzovskou
hranicí $\partial\Omega$, jak jsme to předpokládali již výše. Navíc budeme předpokládat,
že Ω je unimodulární, což nám umožňuje definovat triangulaci oblasti Ω
složenou z n -simplexů tak, že jsou splněny body $(T_n 1) - (T_n 4)$ z předpokladu
(MKP1) a navíc platí, že

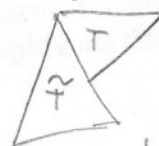
$(T_n 5)$ Libovolné dva různé n -simplexy $T, \tilde{T} \in T_n$ jsou buď disjunktní, nebo jejich
průnikem je m -stěna nebo ještě n -simplex, přičemž $m \in \{0, \dots, n-1\}$.

Př. $n=2$: $T \cap \tilde{T} = \emptyset$, vrchol, hrana; $n=3$: $T \cap \tilde{T} = \emptyset$, vrchol, hrana, stěna

Euklidovské Platí tedy, že každá stěna libovolného n -simplexu $T \in T_n$ je buď podmnožinou
hranic $\partial\Omega$ nebo stěnou jiného n -simplexu $\tilde{T} \in T_n$. V drakem případě se
Př. n -simplexy $T, \tilde{T}$ nazývají přilehlé.



$(T_n 5)$ sphéro



$(T_n 5)$ uvnitř sphéro

hanging nodes

Uvažujeme nyní libovolnou triangulaci T_h splývající $(T_1)-(T_5)$ složenou z n -simplexů a pro každé $T \in T_h$ uvažujeme konečný prvek (T, P_T, Σ_T) definovaný výše uvedeným způsobem se stejným $\Sigma \equiv \forall T \in T_h$. Označme

$$M_h = \bigcup_{T \in T_h} L_2(T).$$

Je-li F libovolná m -stěna libovolného n -simplexu $T \in T_h$, $m \in \{0, \dots, n-1\}$, pak platí $L_2(T) \cap F = L_2(F)$.
 Necht $\tilde{T} \in T_h$. Pak $L_2(\tilde{T}) \cap F \subseteq \tilde{T} \cap T = \tilde{F}$ ^{spol. m-stěna}
 $\Rightarrow L_2(\tilde{T}) \cap F = (L_2(F) \cap \tilde{F}) \cap F = L_2(F) \cap F \subseteq L_2(T) \cap F = L_2(F)$
 $\Rightarrow (H) M_h \cap F = L_2(F) = L_2(T) \cap F$.
 Podobně $L_2(\tilde{T}) \cap T = L_2(\tilde{T}) \cap \tilde{F} = L_2(F) \subseteq L_2(T)$

Platí tedy též

$$(*) M_h \cap T = L_2(T) \quad \forall T \in T_h.$$

Nechť $N_h = \text{card } M_h$

$$M_h = \{z_i\}_{i=1}^{N_h}, \quad z_i \in P_T \quad \forall T \in T_h, \quad v_h|_T(z) = v_h|_{\tilde{T}}(z) \quad \forall T, \tilde{T} \in T_h,$$

Označme

$$T_h^i = \{T \in T_h; z_i \in T\}.$$

Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_h} \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Díky $(*)$ a větě o $L_2(T)$ existuje právě jedna funkce $v_h \in L^2(\Omega)$ taková, že pro každé $T \in T_h$ platí $v_h|_T \in P_T$ a

$$v_h|_T(z_i) = \alpha_i \quad \forall z_i \in T, \quad i=1, \dots, N_h.$$

Je-li $T, \tilde{T} \in T_h^i$, pak

$$v_h|_T(z_i) = \alpha_i = v_h|_{\tilde{T}}(z_i).$$

Uvažujeme-li tedy v_h pro všechny možné hodnoty α_i , získáme celý prostor

$$X_h = \{v_h \in L^2(\Omega); v_h|_T \in P_T \quad \forall T \in T_h, v_h|_T(z_i) = v_h|_{\tilde{T}}(z_i) \quad \forall T, \tilde{T} \in T_h^i, i=1, \dots, N_h\}.$$

Toto je hledaný prostor konečných prvků přiřazený triangulaci T_h a konečným prvkem (T, P_T, Σ_T) . Množina stupně volnosti prostoru X_h

$$\text{je } \Sigma_h = \{v_h(z); z \in M_h\}.$$

Poznamenejme, že bez předpokladu (T_5) by prostor X_h mohl mít tato degraď, neboť na vnitřních stěnách bychom měli a každé straně jiné stupně volnosti.

Věta Vše definovaný prostor X_n splňuje $X_n \subset C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

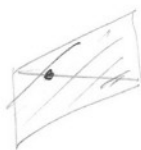
Důkaz: Podle toho co jsme došli už, stačí ukázat, že $X_n \subset C(\bar{\Omega})$. Bud' $x \in \bar{\Omega}$ ^{$n \in X_n$ a}
 Pak $\exists T \in \mathcal{T}_n$ tak, že $x \in T$. Jeli $x \in \text{int } T$, pak v_n je spojitá v x , neboť
 $v_n|_T \in P_T \subset C(T)$. Jeli $x \in \partial T \setminus \text{int}(\partial T \cap \partial \Omega)$, pak existuje $\tilde{T} \neq T$ tak, že
 $F \equiv T \cap \tilde{T} \ni x$. Jeliže F je m -tá, $m \in \{0, \dots, n-1\}$, je $f \in (v_n|_T)|_F$
 jednoznačně určena hodnotami $f \in v_n|_T$ v bodech množiny $L_2(F)$. Stejně
 tak je $f \in (v_n|_{\tilde{T}})|_F$ jednoznačně určena hodnotami $f \in v_n|_{\tilde{T}}$ v bodech
 množiny $L_2(F)$. Podle (*) a definice X_n mají $f \in v_n|_T$ a $v_n|_{\tilde{T}}$
 v bodech množiny $L_2(F)$ stejné hodnoty, a tedy $(v_n|_T)|_F = (v_n|_{\tilde{T}})|_F$.
 Speciálně tedy $v_n|_T(x) = v_n|_{\tilde{T}}(x)$. Jeliže $\tilde{T}$ byl libovolný element obklopující x ,
 je v_n spojitá v x . $\square$

Prostor X_n splňuje předpoklady (MKP2) a navíc ukážeme, že splňuje i (MKP3).
 Definujeme-li $f \in \phi_i \in X_n$ takové, že

$$\phi_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad z_j = 1, \dots, N_n,$$

$$\forall \tilde{T} \neq T : \phi_i|_{\tilde{T}} = 0.$$

pak tyto f tvoří bázi prostoru X_n a $\text{supp } \phi_i = \bigcup_{\substack{T \in \mathcal{T}_n \\ z_i \in T}} T$, tj. $f \in \phi_i$
 mají malí nosiče



Příklady lineárních prvků definovaných na kvádrech v $\mathbb{R}^n$

$$Q_n = \left\{ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq i \leq n}} \gamma_\alpha x^\alpha; \gamma_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

prostor polynomů stupně nejvýše n vzhledem
 ke každé proměnné $x_1, \dots, x_n$, $k \geq 0$, $n \geq 1$.

$$\dim Q_n = (n+1)^n$$

$$P_n \subset Q_n \subset P_{n,n}$$

$$Q_n(A) = \{ p|_A; p \in Q_n \}, \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

Ma-li A neprázdný vnitřek, je $\dim Q_n(A) = \dim Q_n$.

Věta Každý polynom $p \in \mathbb{Q}_2$ je jednoznačně určen svými hodnotami na množině

$$M_2 = \left\{ x = \left(\frac{i_1}{2}, \frac{i_2}{2}, \dots, \frac{i_n}{2} \right) \in \mathbb{R}^n; i_j \in \{0, 1, \dots, 2\}, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Důkaz: Jelikož $\text{card } M_2 = \dim \mathbb{Q}_2$, stačí ukázat, že $\forall z \in M_2 \exists p \in \mathbb{Q}_2$ taková, že

$$p(z) = 1 \quad \text{a} \quad p(y) = 0 \quad \forall y \in M_2 \setminus \{z\}.$$

Nechť $z = \left(\frac{i_1}{2}, \dots, \frac{i_n}{2} \right)$. Pak

$$p(x) = \prod_{j=1}^n \prod_{\substack{i'_j=0 \\ i'_j \neq i_j}}^2 \frac{2x_j - i'_j}{i_j - i'_j}.$$

$$\Rightarrow p \in \mathbb{Q}_2 \quad p(z) = \prod_{j=1}^n \prod_{\substack{i'_j=0 \\ i'_j \neq i_j}}^2 \frac{i_j - i'_j}{i_j - i'_j} = 1$$

$$x'' = \left(\frac{i''_1}{2}, \dots, \frac{i''_n}{2} \right) \neq z \Rightarrow p(x'') = \prod_{j=1}^n \prod_{\substack{i'_j=0 \\ i'_j \neq i_j}}^2 \frac{i''_j - i'_j}{i_j - i'_j} = 0$$

$$\Rightarrow \exists i''_j \neq i_j \Rightarrow \prod_{\substack{i'_j=0 \\ i'_j \neq i_j}}^2 \frac{i''_j - i'_j}{i_j - i'_j} = 0$$

Pro libovolnou $p \in \mathbb{Q}_2$ platí tedy identita

$$p = \sum_{\substack{0 \leq i_j \leq 2 \\ 1 \leq j \leq n}} \left(\prod_{j=1}^n \prod_{\substack{i'_j=0 \\ i'_j \neq i_j}}^2 \frac{2x_j - i'_j}{i_j - i'_j} \right) p\left(\frac{i_1}{2}, \frac{i_2}{2}, \dots, \frac{i_n}{2}\right). \quad \square$$

Množina M_2 má každý pro $\mathbb{Q}_2$ analogický význam jako množina $L_2(T)$ pro $\mathbb{P}_2$. Víme-li, že konvexní obal body množiny M_2 je jednorázová krychle v $\mathbb{R}^n$, tj. množina $[0, 1]^n$. M_2 bychom tedy mohli nazvat hlavní množinou jednorázové krychle v $\mathbb{R}^n$.

Uvažujme nyní obecný kvádr v $\mathbb{R}^n$, tj. množinu tvaru

$$T = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n); a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, \dots, n \right\},$$

kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty, i=1, \dots, n$. Střed n -rozměrného kvádru jsou množiny

$$\{a_j\} \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [a_i, b_i], \quad \{b_j\} \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [a_i, b_i], \quad j=1, \dots, n,$$

hrany jsou

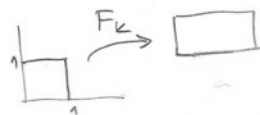
$$[a_j, b_j] \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \{a_i\}, \quad j=1, \dots, n,$$

kde $a_i \in \{a_i, b_i\}$.

Vrcholy jsou body $x = (x_1, \dots, x_n)$, kde $x_i \in \{a_i, b_i\}, i=1, \dots, n$.

Pro libovolný n -rozměrný kvádr T existuje (jednoznačně určené) zobrazení $F_T(x) = B_T x + b_T$, kde B_T je diagonální matice a $b_T \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$T = F_T([0, 1]^n).$$



Například může zvolit $B_T = \text{diag}(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$, $b_T = (a_1, \dots, a_n)$.

Je zřejmé, že polynom $p \in \mathbb{Q}_2$ je též jednoznačně určen svojí hodnotami na množině

$$M_2(T) = F_T(M_2).$$

zřejmě $M_2(T) \subset T$.

Můžeme tedy deformovat konečné prvky zvané n -rozměrné kvadry stupně 2:

$$T = \prod_{i=1}^n [c_i, b_i],$$

$$P_T = \mathbb{Q}_2(T),$$

$$\Sigma_T = \{p(z); z \in M_2(T)\}.$$

Konkrétní příklady konečných prvků (T, P_T, Σ_T) deformujících tento způsobem budou včít vztahy pro běžné funkce uvedeny na cíci 11.

Je-li Ω kvadr nebo n-rozměrný konečný počet kvadrů, může být deformována triangulace oblasti Ω nahrazení kvadry. Pochmelen (T_n5) může být formulována např. takto:

(T_n5) Každá stěna libovolného kvadru $T \in T_n$ je buď pochmelenou hranicí ∂T nebo stěnou jiného kvadru $\tilde{T} \in T_n$.

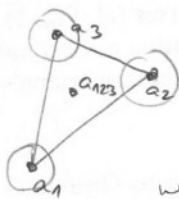
V druhém případě kvadry T a $\tilde{T}$ mají být přilehlé.

Analogicky — způsobem jako pro n -simplexy může být deformovat prostor karetych prvků X_n . Opět platí, že $X_n \subset C(\Omega) \cap H^1(\Omega)$.

Hermitovské konečné prvky

V výše uvedených příkladech konečných prvků byly skupiny volnosti bodových funkcí v bodech. Takovéto kon. prvky se nazývají Lagrangeovy. Můžeme však též jako skupinu volnosti považovat bodové parciálních derivací nebo obecněji bodové derivací v určitých směrech. Takové kon. prvky se nazývají hermitovské.

Př.



$$T = \Delta$$

$$P_T = P_3(T)$$

$$\Sigma_T = \{p(a_1), p(a_2), p(a_3), p(a_{123}), \nabla p(a_1), \nabla p(a_2), \nabla p(a_3)\}.$$

$$\text{nebo } \Sigma_T = \{p(a_1), p(a_2), p(a_3), p(a_{123}), \nabla p(a_i)(a_j - a_i), a_{ij} = 1, 2, 3, i \neq j\}.$$

Obě volby skupiny volnosti jsou samozřejmě ekvivalentní a jednoznačně určují libovolný polynom $p \in P_3(T)$. Přitom skupinu volnosti příslušející k libovolnému kóci jednoznačně určují fci p na této kóci. Z toho plyne, že odpovídající

prátor X_n opäť splňuje $X_n \subset C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Podrobnejšie diskusia a ďalšie príklady budem uvádzať na cvičení.

Ďalej definovať také prátory P_T a množiny rohov Σ_T takým spôsobom, že príslušný prátor X_n patrí do $C^1(\bar{\Omega})$ a v prípade do $H^2(\Omega)$ - viz cvičenie. Uvedeť príklady - úlohy:

Obecná definícia konečného prvku

Def. Konečný prvek v $\mathbb{R}^n$ je trojica (T, P, Σ_T) , kde

1) T je uzavretá podmnožina $\mathbb{R}^n$ s neprázdny vnútro a Lipschitzovými hranicami;

2) P_T je konečne dimenzionálny prátor reálnych fčí definovaných na T ; $N_T = \dim P_T$;

3) Σ_T je množina N_T lineárnych foriem Φ_i , $i=1, \dots, N_T$, definovaných na prátore P_T a takých, že množina Σ_T je P_T -unisolvencia, t.j.

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_{N_T} \in \mathbb{R} \exists! p \in P_T : \Phi_i(p) = \alpha_i, \quad i=1, \dots, N_T.$$

Unisolventosť vyplýva, že lineárne formy Φ_i sú LN a že existujú funkcie $p_i \in P_T$, $i=1, \dots, N_T$ také, že

$$\Phi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad i, j=1, \dots, N_T.$$

Takže teda

$$p = \sum_{i=1}^{N_T} \Phi_i(p) p_i \quad \forall p \in P_T.$$

Lineárne formy Φ_i , $i=1, \dots, N_T$ sa nazývajú stupne volnosti konečného prvku, fče p_i , $i=1, \dots, N_T$ sa nazývajú bázové funkcie konečného prvku.

Pozn. Množina T sa tiež často nazýva konečný prvek.

Pozn. Unisolventosť množiny Σ_T vzhľadom k P_T je ekvivalentná tomu, že lineárne formy Φ_i , $i=1, \dots, N_T$ tvoria bázu v dualnom prátore k P_T . Báze $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N_T}$ a $\{p_i\}_{i=1}^{N_T}$ sa tiež považujú za dualnú bázu v algebraickom smysle.
 [over it that, the basis functions p_i satisfy $\Phi_j(p_i) = \delta_{ij}$, or that, the basis functions Φ_i satisfy $\Phi_i(p) = 0, i=1, \dots, N_T \Rightarrow p=0$. This is a direct consequence.]

Pozn. Unisolventosť tiež V predchádzajúcich príkladoch bolo:

$T = n$ -simplex, kváder; alebo ľubovoľný konvexný čtveruholník či šesťuholník, polygonálny mnohostran, napr. pyramida; alebo tiež množina elementov s rôznymi hranami či stenami;

$P_T \supset P_2(T)$ pro $n \geq 1$ - základné dôležité pre dôkazy konvergence

$$\Sigma = p(a_i), Dp(a_i) \xi_{i2}, D^2 p(a_i) (\xi_{i1}, \xi_{i2}), \quad a_i \in T, \quad \xi_{i1}, \xi_{i2}$$

jsou dány bod geometrie T nebo souřadnými osami

bodů a_i se nazývají uzly elementárního prvku

nebo uvažujeme také jiné stupně volnosti, např. integralem rovnice:

$$\int_T p \, dx, \quad \int_F p \, dx, \quad \int_F p \chi_i \, dx \quad (F \dots \text{stěna})$$

Podeš-li chciš zderivovat příslušnost prostoru P a množiny Σ' k elementu T , budeme psát $(T, P_T, \Sigma_T) \mapsto (T, P, \Sigma)$.

Předpředpokládáme, že lineární funkcionály z množiny Σ' jsou definovány na nějakém vektorovém prostoru $Q \supset P$. Např. pro Lagrangeovy kvadratické prvky lze vzít $Q = C(T)$, pro hermitovy $Q = C^s(T)$ s nějakým $s > 0$. Pak můžeme

definovat projekci $\Pi: Q \xrightarrow{\text{na}} P$ předpisem

$$\Pi v = \sum_{i=1}^N \Phi_i(v) p_i, \quad v \in Q.$$

Tato projekce se nazývá P-interpolace^{funkce v}, a bude-li třeba, budeme psát také značením $\Pi_T v$. Jelikož Σ' je P-unisolventní, je P-interpolací funkce v definován jedinečně také podmínkami

$$\Pi v \in P, \quad \Phi_i(\Pi v) = \Phi_i(v), \quad i=1, \dots, N. \quad (\text{alternativní definice})$$

Je důležité, že Π je projekce, tj. že

$$\Pi p = p \quad \forall p \in P.$$

Pozn.

Mají-li lineární formy ze Σ' význam funkčních hodnot, hovoříme o Lagrangeově interpolaci (v tomto případě $\mathcal{D}(\Pi) = C(T)$).

Jsou-li mezi du. formami také derivace, hovoříme o Hermitově interpolaci (pak $\mathcal{D}(\Pi) = C^s(T)$, $s > 0$).

Přijmeme, že dva kvadratické prvky (T, P, Σ) a $(\tilde{T}, \tilde{P}, \tilde{\Sigma})$ jsou stejně^{stejně}, jestliže

$$T = \tilde{T}, \quad P = \tilde{P}, \quad \Pi_T = \Pi_{\tilde{T}}.$$

tj. stejně, interpolace ekvivalentní

Tento pojem má význam pro hermitovy kvadratické prvky, u nichž vždy existuje několik možných definic stupně volnosti vedoucích ke "stejným" elementárním prvkům.

P₃ (redukovaný kubický hermitový n-complex) - obr. 8.2

Dvě různé množiny stupně volnosti jsou

$$\Sigma = \{ p(a_i), i=1, \dots, n+1; Dp(a_i)(a_j - a_i), i,j=1, \dots, n+1, i \neq j \},$$

$$\Sigma' = \{ p(a_i), i=1, \dots, n+1; \partial_k p(a_i), i=1, \dots, n+1, k=1, \dots, m \}.$$

Označme Π a Π' příslušné $P_3''(T)$ -interpolacní operátory. Pak $\mathcal{D}(\Pi) = \mathcal{D}(\Pi') = C^1(T)$



a pro libovolné $v \in C^1(T)$ platí

$$(\Pi v)(a_i) = v(a_i), \quad i=1, \dots, n+1, \quad \nabla(\Pi v)(a_i) \cdot (a_j - a_i) = \nabla v(a_i) \cdot (a_j - a_i), \quad i, j=1, \dots, n+1, i \neq j$$

$$\Rightarrow \nabla(\Pi v)(a_i) = \nabla v(a_i), \quad i=1, \dots, n+1 \quad (\text{nebot' vektorů } \{a_j - a_i\}_{j=1, j \neq i}^n \text{ jsou LN})$$

$$(\Pi' v)(a_i) = v(a_i), \quad i=1, \dots, n+1, \quad \partial_k(\Pi' v)(a_i) = \partial_k v(a_i), \quad i=1, \dots, n+1, \quad k=1, \dots, n.$$

$$\text{Teď } (\Pi v)(a_i) = (\Pi' v)(a_i), \quad \nabla(\Pi v)(a_i) = \nabla(\Pi' v)(a_i), \quad i=1, \dots, n+1 \Rightarrow \Pi v = \Pi' v.$$

Teď $\Pi = \Pi'$ a tedy $(T, P_2^n(T), \Sigma)$ a $(T, P_2^n(T), \Sigma')$ jsou shodné.

Uvažujme nyní libovolné dva n -simplexy $T, \hat{T} \subset \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že existuje zobrazení $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňující

$$(*) \quad F(x) = B \cdot x + b, \quad B \text{ --- regulární matice } n \times n, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

a $F(\hat{T}) = T$. Zobrazení splňující (*) se nazývá invertibilní afinní zobrazení (afinní regulární zobrazení).

Nechť (T, P, Σ) a $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ jsou dva libovolné lagrangeovské n -simplexy

shodně $\underline{g}, \underline{h}$:

$$T = n\text{-simplex}, \quad P = P_2(T), \quad \Sigma = \{p(z); z \in L_2(T)\},$$

$$\hat{T} = n\text{-simplex}, \quad \hat{P} = P_2(\hat{T}), \quad \hat{\Sigma} = \{\hat{p}(\hat{z}); \hat{z} \in L_2(\hat{T})\}.$$

Platí

$$\{p: T \rightarrow \mathbb{R}; p = \hat{p} \circ F^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\} = P,$$

$$\{p(F(\hat{z})); \hat{z} \in L_2(\hat{T})\} = \Sigma.$$

Zavedeme-li označení $\Sigma = \{\phi_i\}_{i=1}^N$, $\hat{\Sigma} = \{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^N$, pak při vhodném očíslování lze druhý vztah ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\phi_i(p) = \hat{\phi}_i(p \circ F), \quad i=1, \dots, N.$$

Vidíme tedy, že místo alychom specifikovali systém konečných prvků stejného typu pomocí dat T, P, Σ , stačí specifikovat pouze jednu referenční konečný prvek $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ a všechny ostatní definovat pomocí afinních regulárních zobrazení F .

Uvedené vztahy neplatí pouze mezi lagrangeovskými konečnými prvky, ale i mezi řadou jiných konečných prvků, např. vektory nebo skalary.

Zavedeme proto následující definici:

Def. Dva konečné prvky $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ a (T, P, Σ) jsou afině ekvivalentní, jestliže existuje afinní regulární zobrazení $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ takové, že

$$T = F(\hat{T}),$$

$$P = \{p: T \rightarrow \mathbb{R}; p = \hat{p} \circ F^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\},$$

$$\Sigma = \{\phi; \phi(p) = \hat{\phi}(p \circ F), \hat{\phi} \in \hat{\Sigma}\}.$$

Pozn. Necht $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ je konečný prvek, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ afinní regulární zobrazení a T, P, Σ jsou definovány vztahy uvedeny v definici. Pak (T, P, Σ) je konečný prvek. Toto pozorování nám umožňuje systematicky generovat konečné prvky pomocí jakéhokoli první zvoleného konečného prvku $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Je-li např. $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ obdílčí stupně 2, pak uvedeny způsobem lze získat konečné prvky, jejichž množiny T jsou rovnoběžníky. Můžeme ovšem dosadit i obecnější zobrazení F a pak můžeme získat např. libovolný konvexní čtyřúhelník nebo můžeme získat elipsy, jejichž hmotný střed je v libovolném bodě.

Pozn. Z uvedeného též plyne, že k ověření ekvivalence pro (T, P, Σ) stačí vzít afinně ekvivalentní prvek $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, kde $\hat{T}$ má jednoduchou geometrii. Jak jsme viděli, libovolná dva lagrangeovské n-plexy stejného stupně jsou afinně ekvivalentní. Totéž platí i pro regulární kubické n-plexy

i pro danou problematiku lagrangeovské konečné prvky na kvádrech v $\mathbb{R}^n$.

V případě hermitických konečných prvků je však situace složitější. Uvažujme-li např. kubický hermitický n-plex z obr. 8.1, pak afinní ekvivalence je zřejmá v případě stupňů volnosti definovaných v množině Σ_T , neboť

$$\nabla(p \circ F)(\hat{a}_i) \cdot (\hat{a}_j - \hat{a}_i) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \frac{\partial p}{\partial x} (F(\hat{a}_i)) \frac{\partial F_x}{\partial x} (\hat{a}_j - \hat{a}_i) = (\nabla p)(F(\hat{a}_i)) \cdot (F(\hat{a}_j) - F(\hat{a}_i)) = (\nabla p)(a_i) \cdot (a_j - a_i),$$

pohled $F(\hat{a}_i) = a_i$.

Zvolíme-li však stupně volnosti Σ'_T , pak afinní ekvivalence zůstává jen, ačoli $\Sigma_T: \Sigma'_T$ odpovídají stejným konvexním prvkům.

Je-li stupni volnosti normované derivace v určitém bodě na hranici, pak bývají konečné prvky obecně afinně ekvivalentní nejsou. Dva hyperkubické trojúhelníky tak obecně nejsou afinně ekvivalentní. Podobně dva Bellary Δ nejsou afinně ekvivalentní, neboť derivace prostoru $P_5(T)$ obsahuje normované derivace na hranicích.

Kdyžli budeme dva elementy $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ a (T, P, Σ) afinně ekvivalentní, budeme vždy používat vztahy

$$\hat{x} \in \hat{T} \rightarrow x = F(\hat{x}) \in T, \quad \hat{p} \in \hat{P} \rightarrow p = \hat{p} \circ F^{-1} \in P$$

nezi body $\hat{x} \in \hat{T}$, $x \in T$ a $\hat{p} \in \hat{P}$ a $p \in P$. (vztahy si odpovídají body a funkce)

Můžeme tedy psát $\hat{p}(x) = p(x) \quad \forall x \in \hat{T}, \hat{p} \in \hat{P}$.

Věta Necht' $(T, P, \hat{\Sigma})$ a (T, P, Σ') jsou dva afinně ekvivalentní konečné prvky a necht' $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ jsou body pro konečné prvky $(T, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Pak lze $p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1}$, $i=1, \dots, N$ jsou body pro konečné prvky (T, P, Σ') . Navíc platí, že $\hat{P}$ -interpolace operator $\hat{\Pi}$ a P -interpolace operator Π splňují

$$\hat{\Pi} \hat{v} = \Pi v \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{Q}(\hat{T}).$$

(⇒ stačí odvodit interpolaci na jedné elementu.

pro n -simplex je již vidět v příkladech, že to lze dělat pomocí barycentrické souřadice (pro uvažování při afinní zobrazení).

Důkaz: Necht' $\hat{\Sigma} = \{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^N$ a označme

$$\phi_i(v) = \hat{\phi}_i(v \circ F). \text{ Pak } \{\phi_i\}_{i=1}^N = \Sigma'.$$

Platí $\phi_j(p_i) = \hat{\phi}_j(p_i \circ F) = \hat{\phi}_j(\hat{p}_i) = \delta_{ij}$, tedy $p_1, \dots, p_N$ jsou body pro konečné prvky (T, P, Σ') . Dále

$$\hat{\Pi} \hat{v} = \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i(\hat{v}) \hat{p}_i = \sum_{i=1}^N \phi_i(v \circ F) p_i \circ F = \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(v) p_i \right) \circ F = \Pi v. \quad \square$$

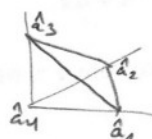
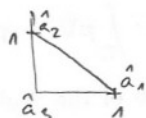
A family

affine family

Systém konečných prvků se nazývá afinní systém, pokud všechny v něm obsažené konečné prvky jsou afinně ekvivalentní ^{to a single} jednomu konečnému prvku $(T, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, který se nazývá referenčním konečným prvem tohoto systému ($(T, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ se nemusí náležet do původního systému km. prvků).

Pokud afinní systém sestává z n -simplexů, je obvyklou volbou pro $\hat{T}$ jednotkový n -simplex, jehož vrcholy jsou

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \hat{a}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \hat{a}_n &= (0, 0, \dots, 0, 1), \\ \hat{a}_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$



Je-li nyní T libovolný n -simplex s vrcholy $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, $a_j = (a_{ij})_{i=1}^n$, pak podle definice n -simplexu je matice

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

regulární. Je tedy regulární i matice

$$B_T = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{1,n+1} & a_{12} - a_{1,n+1} & \dots & a_{1n} - a_{1,n+1} \\ a_{21} - a_{2,n+1} & a_{22} - a_{2,n+1} & \dots & a_{2n} - a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{n,n+1} & a_{n2} - a_{n,n+1} & \dots & a_{nn} - a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Definujeme-li zobrazení $F_T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vztahem

$$F_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + b_T, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad b_T = (a_{1,n+1}, \dots, a_{n,n+1}),$$

pak F_T je afinní regulární zobrazení a $F_T(\hat{a}_i) = a_i$, $i=1, \dots, n+1$.

Jelikož F_T je lineární a n -simplex je konvexní, zřejmě je $F_T(\hat{T}) = T$.

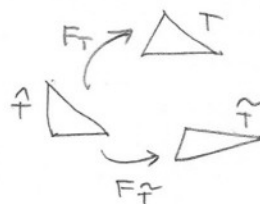
Víme také, že $F_T^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \end{pmatrix}$. (Snadno ověříme, že $F_T^{-1}(a_i) = \hat{a}_i, i=1, \dots, n+1$,

z čehož to okamžitě plyne - lineární funkce je jednoznačně určena svou hodnotou ve vrcholech T .)

Yon-li $T, \hat{T}$ dva různé n -simplexy v $\mathbb{R}^n$, pak zobrazení $F \equiv F_T \circ F_{\hat{T}}^{-1}$ je afinní regulární zobrazení,

kteřé zobrazuje $\hat{T}$ na T . Zobrazení F není určeno

jednoznačně, neboť závisí na určitých vrcholech n -simplexu T a $\hat{T}$.



Pomocí následně, že na referenčním jednotkovém n -simplexu $\hat{T}$ mají barycentrické souřadnice jednoduchý tvar

$$\hat{\lambda}_i(x) = \hat{x}_i, \quad i=1, \dots, n, \quad \hat{\lambda}_{n+1}(x) = 1 - \sum_{i=1}^n \hat{x}_i.$$

Jestliže afinní systém sestává z Ewaldův v $\mathbb{R}^n$ volíme obvykle $\hat{T} = [0, 1]^n$ nebo $\hat{T} = [-1, 1]^n$.

Koncepce afinních systémů konečných ^{prvků} má zásadní důležitost jednak pro praktické výpočty, kdy většina výpočtová matice bývá je pravidelná na referenčním elementu, a jednak pro vyhledávání elegantní interpolací konve, která je základem výsledků o konvergenci.

Obecná definice prostoru konečných prvků

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí a nechť $\mathcal{T}_h$ je triangulace oblasti Ω splňující přímý ^{(T1)-(T4)} předpoklad (MKP1). Každé množině $T \in \mathcal{T}_h$ nechť je přiřazen konečný prvek (T, P_T, Σ_T) .

Nechť $T, \tilde{T} \in \mathcal{T}_h$ a $\phi \in \Sigma_T, \tilde{\phi} \in \Sigma_{\tilde{T}}$. Řekneme, že funkcionály $\phi, \tilde{\phi}$ jsou ekvivalentní, jestliže

$$\phi(v|_T) = \tilde{\phi}(v|_{\tilde{T}}) \quad \forall v \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Předp., že všechny konečné prvky jsou voleny tak, že pro libovolné $T \in \mathcal{T}_h$ žádné dva funkcionály z Σ_T nejsou ekvivalentní. Množinu $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_T$ lze tedy rozdělit na podmnožiny $\Sigma_{h,1}, \dots, \Sigma_{h,N_h}$ sestávající

z ekvivalentních funkcí. Předpokládáme, že libovolné dva ekvivalentní funkce ze $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_T$ leží v téže množině $\Sigma_{h,i}$. Některé množiny $\Sigma_{h,i}$ mohou být jednoprvkové (např. pro funkce reprezentující body v bodech mřížky elementů). Indexy $i=1, \dots, N_h$ množin $\Sigma_{h,i}$ nazýváme uzly. Tyto uzly mohou odpovídat např. vrcholům a středům hran ($\in \mathbb{P}^2 \cap \Delta$), ale mohou to být také abstraktní objekty, které mají žádnou konkrétní geometrickou reprezentaci. Necht

$$\mathcal{T}_{h,i} = \{T \in \mathcal{T}_h; \Sigma_{h,i} \cap \Sigma_T \neq \emptyset\}$$

je množina elementů "obsahujících" daný uzel i . Gelibž

$$\text{card}(\Sigma_{h,i} \cap \Sigma_T) = 1, \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h,i},$$

je

$$\text{card } \mathcal{T}_{h,i} = \text{card } \Sigma_{h,i}.$$

Funkce ležící v průniku $\Sigma_{h,i} \cap \Sigma_T$ označme $\phi_{T,i}$. Je tedy

$$\Sigma_{h,i} = \{\phi_{T,i}; T \in \mathcal{T}_{h,i}\},$$

přičemž $\phi_{T,i} \in \Sigma_T$.

Nyní můžeme definovat prostor konečných prvků

$$X_h = \{v_h \in L^2(\Omega); v_h|_T \in \mathcal{P}_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \phi_{T,i}(v_h|_T) = \phi_{\tilde{T},i}(v_h|_{\tilde{T}}) \\ \forall T, \tilde{T} \in \mathcal{T}_{h,i}, \quad i=1, \dots, N_h\}.$$

Pokud $\text{card } \mathcal{T}_{h,i} = 1$, podmínka s funkcí se nijak neprojeví.

Uvedený prostor je zobecněním dříve uvedených prostorů ^(polyhedrálních) konečných prvků. Jak jsme viděli, lze pro určité typy konečných prvků ukázat, že $X_h \subset C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, pokud je splněna podmínka (h5) každá stěna libovolného elementu $T \in \mathcal{T}_h$ je buď podmnožinou hranice $\partial\Omega$ nebo stěnou jiného elementu $\tilde{T} \in \mathcal{T}_h$.

Dále jsme viděli, že lze kombinovat těkromé prvky, pro něž

$$X_h \subset C^s(\bar{\Omega}), \quad s > 0.$$

Pozn. Funkce z prostoru X_h nemusí být na hranicích mezi elementy definovány jednoduše. To nevede, neboť se na ně dříve jako na $f \in L^2$ které jsou vždy pouze hodnotami vnitřních elementů. (vlastně je uvažováno s. v. i. i. a Σ_T to není element)

Označme $I_h(T) = \{i \in \{1, \dots, N_h\}; T \in \mathcal{J}_{h,i}\}$

($\text{card } I_h(T) = \text{card } \Sigma'_T$)
($T \in \mathcal{J}_{h,i} \Leftrightarrow i \in I_h(T)$)

musíme užít "obrázců" v daném elementu $T \in \mathcal{J}_h$. Pak

$$\forall T \in \mathcal{J}_h \quad \forall \phi \in \Sigma_T \quad \exists! i \in I_h(T) : \phi = \phi_{T,i}.$$

Tedy

$$\forall T \in \mathcal{J}_h : \Sigma'_T = \{\phi_{T,i} ; i \in I_h(T)\}.$$

Označme $\{\phi_{T,i} ; i \in I_h(T)\}$ báze' fe prostoru P_T dualní k funkcionálům $\{\phi_{T,i} ; i \in I_h(T)\}$. Položme $\phi_{T,i} = 0$ v $\Omega \setminus T$, $i \in I_h(T)$.

Pak $v_h \in X_h$. Pak

$$(*) \quad v_h = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \sum_{i \in I_h(T)} \alpha_{T,i} \phi_{T,i}, \quad \alpha_{T,i} \in \mathbb{R}.$$

Jelikož $\forall T \in \mathcal{J}_h$ je $v_h|_T = \sum_{i \in I_h(T)} \alpha_{T,i} \phi_{T,i}|_T$, platí

$$\alpha_{T,i} = \phi_{T,i}(v_h|_T).$$

≠ definice prostoru X_h tedy plyne, že

$$(**) \quad \alpha_{T,i} = \alpha_{\tilde{T},i} \quad \forall T, \tilde{T} \in \mathcal{J}_{h,i}, \quad i=1, \dots, N_h.$$

Označme pro $i=1, \dots, N_h$

$$\alpha_i = \alpha_{T,i} = \phi_{T,i}(v_h|_T), \quad T \in \mathcal{J}_{h,i}.$$

Pak

$$v_h = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \sum_{i \in I_h(T)} \alpha_i \phi_{T,i} = \sum_{\substack{T \in \mathcal{J}_h, i \in \{1, \dots, N_h\} \\ T \in \mathcal{J}_{h,i}}} \alpha_i \phi_{T,i} = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \sum_{T \in \mathcal{J}_{h,i}} \phi_{T,i}.$$

Označme-li

$$p_i = \sum_{T \in \mathcal{J}_{h,i}} \phi_{T,i}, \quad i=1, \dots, N_h,$$

(globální báze' fe se dostanou
poslépově' lokálních
bázových fu')

dostáváme

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i p_i, \quad \text{zde } \alpha_i = \phi_{T,i}(v_h|_T), \quad T \in \mathcal{J}_{h,i} \text{ libovolné'}$$

Funkce $\{p_i\}_{i=1}^{N_h}$ jsou lineárně nezávislé, neboť $\bigcup_{T \in \mathcal{J}_h} \{\phi_{T,i}\}_{i \in I_h(T)}$ jsou L.N.
Je vztah (*) a (**) ekvivalentní plyne, že $p_i \in X_h$, $i=1, \dots, N_h$. (Fe ve splinčích (*) a (**) patří do X_h .)

$\swarrow$ potať tůd ekvivalentní funkce
 Tedy dle $X_u = N_u$ a fce $\{p_i\}_{i=1}^{N_u}$ tvoří bázi prostoru X_u .
 Platí

$$\text{supp } p_i \subset \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{h,i}} T.$$

Podle definice ekvivalence funkcí je $\bigcap_{T \in \mathcal{T}_{h,i}} T \neq \emptyset$ (jeden z možných
 $\phi_{T,i}(q|_T) = \text{const.}, T \in \mathcal{T}_{h,i} \quad \forall q \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Tedy pro každou uzel i existuje
 bod, který je společný všem elementům z $\mathcal{T}_{h,i}$, což znamená, že funkce
 p_i mají "malé" nosiče. vlastnost nosiče - viz M-5

Definujeme-li na X_u lineární funkcionály $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_u}$ vztahy

$$(*) \quad \phi_i(v_u) = \phi_{T,i}(v_u|_T), \quad v_u \in X_u,$$

kde $T \in \mathcal{T}_{h,i}$ je libovolný element, pak

$$\forall v_u \in X_u: \quad v_u = \sum_{i=1}^{N_u} \phi_i(v_u) p_i.$$

Množina $\Sigma_h \equiv \{\phi_i\}_{i=1}^{N_u}$ je množina globálních stupňů volnosti prostoru X_u .

Každá funkce $v_u \in X_u$ je jednoznačně určena hodnotami $\{\phi_i(v_u)\}_{i=1}^{N_u}$.

Zřejmě

$$\phi_i(p_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N_u,$$

tedy funkcionály jsou opět dualní k bázi vektorů funkčních.

Je-li známo, jak volit globální stupně volnosti, je
 položeno

$$(**) \quad \phi_i(v_u) = \frac{1}{\text{card } \mathcal{T}_{h,i}} \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,i}} \phi_{T,i}(v_u|_T).$$

Tyto funkcionály můžeme na X_u stejných hodnot jako funkcionály
 definované vztahem (*). Výhoda funkcionálů definovaných v (**)

všude je, že je na nich snad aplikovat i pro interpolaci
 spojité funkce, které nejsou spojitě na hraničních elementech T .

Nechť $Q(\Omega)$ je prostor reálných funkcí definovaných na $\bar{\Omega}$ takový, že $\forall T \in \mathcal{T}_h$ jsou všechny funkcionály ze Σ'_T definovány na prostoru $Q(\Omega)|_T$. To znamená, že každé globální lineární volnutí jsou na $Q(\Omega)$ definovány. Dále předpokládáme, že prostor $Q(\Omega)$ vede ke stejným možným ekvivalentním funkcionálům jako prostor $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tj.

$\forall T, \tilde{T} \in \mathcal{T}_h$ a $\forall \phi \in \Sigma'_T, \tilde{\phi} \in \Sigma'_{\tilde{T}}$ platí

$$[\phi(v|_T) = \tilde{\phi}(v|_{\tilde{T}}) \quad \forall v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)] \Leftrightarrow [\phi(v|_T) = \tilde{\phi}(v|_{\tilde{T}}) \quad \forall v \in Q(\Omega)].$$

To znamená, že $\phi_i(v) = \phi_{T,i}(v|_T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, i, v \in Q(\Omega), i \in \{1, \dots, N_h\}$.

Pr. Uvažujme-li lagrangeovské lineární prvky, pak lze vzít $Q(\Omega) = C(\bar{\Omega})$.

Nyní můžeme definovat zobrazení Π_h prostoru $Q(\Omega)$ do prostoru X_h vztahem

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^{N_h} \phi_i(v) p_i, \quad v \in Q(\Omega),$$

nebo ekvivalentně vztahy

$$\Pi_h v \in X_h, \quad \phi_i(\Pi_h v) = \phi_i(v), \quad i = 1, \dots, N_h.$$

Pokud $X_h \subset Q(\Omega)$, pak Π_h je projekce. Funkce $\Pi_h v$ se nazývá X_h -interpolant funkce v a operátor Π_h se nazývá X_h -interpolace.

Věta $(\Pi_h v)|_T = \Pi_T(v|_T) \quad \forall v \in Q(\Omega), T \in \mathcal{T}_h$.

Důkaz: $(\Pi_h v)|_T = \sum_{i=1}^{N_h} \phi_i(v) p_i|_T = \sum_{i \in I_h(T)} \phi_i(v) p_i|_T = \sum_{i \in I_h(T)} \phi_{T,i}(v|_T) p_{T,i} = \Pi_T(v|_T). \square$

Tato důležitá věta nám říká, že globální interpolaci získáme poskládáním lokálních interpolací.

Okrajové podmínky

Prostory funkcí ze slabých formulací PDE obvykle splňují nějaké homogenní okrajové podmínky na hranici $\partial\Omega$ nebo na nějaké její části $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Tyto okrajové podmínky se musí projevit i v definici prostoru lineárních prvků.

Předpokládáme, že funkce z prostoru V ze slabé formulace splňují homogenní okraj. podmínku na $\Gamma \subset \partial\Omega$. Např. V :

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ na } \Gamma\} \quad \text{nebo} \quad V = \{v \in H^1(\Omega); v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma\}.$$

Naším cílem je definovat podprostor $V_h \subset X_h$, který bude obsahovat podmínky na P nějak zpřístupněn aproximovat. To lze udělat tak, že položíme

$$\Sigma_h^P = \{ \phi \in \Sigma_h; \phi(v|_\Omega) = 0 \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), v=0 \text{ na } P \}$$

("shybe volně odpovídající" uzel "na částice P ")

$$V_h = \{ v_h \in X_h; \phi(v_h) = 0 \quad \forall \phi \in \Sigma_h^P \}.$$

shybe volně odpovídající uzel na P jsou vždy nuly

Máme pro prostor $Q(\Omega)$ definovat prostor

$$Q^P(\Omega) = \{ v \in Q(\Omega); v|_P = 0 \},$$

a platí-li $\phi(v) = 0 \quad \forall \phi \in \Sigma_h^P, v \in Q^P$,

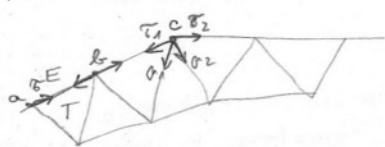
pak operátor Π_h zobrazuje prostor $Q^P(\Omega)$ do prostoru V_h .

To budeme v dalším vždy předpokládat.

Volíme-li triangulaci T_h tak, že každý T je umístit a každá $F \subset \partial\Omega$ splňuje buď $F \subset \bar{P}$ nebo $F \subset \partial\Omega \setminus \bar{P}$, pak ve všech případech, kdy bylo $X_h \subset H^1(\Omega)$, je též $V_h \subset V$. Podobně v těch případech, kdy $X_h \subset H^2(\Omega)$, je též $V_h \subset V$.

Př. Necht' prostor $X_h \subset C(\bar{\Omega})$ je konstruován pomocí lagrangeových konečných prvků. Pak $\forall v_h \in X_h$ a $\forall$ těm F platí, že $v_h|_F$ je jednorázově uvázaná soustava bodů v uzelích ležících na F . Je-li tedy $F \subset P$ pak $v_h|_F = 0 \quad \forall v_h \in V_h$. Tedy $v_h|_P = 0 \quad \forall v_h \in V_h$, tj. $V_h \subset V$.

Př. Uvažujme kubické nebo regulované kubické hermitejské prvky. Necht' $E \subset P$ je hrana elementu T . Bud' $v_h \in V_h$. Pak $v_h(a) = v_h(b) = \nabla v_h(a) \cdot \vec{\tau} = \nabla v_h(b) \cdot \vec{\tau} = 0$.

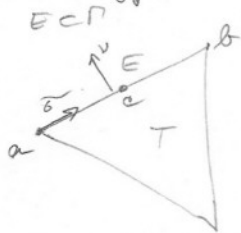


Jeliž $v_h|_E \in P_3(E)$, je $v_h|_E = 0$. Tedy $V_h \subset V$.

V bodě c máme $\nabla v_h(c) \cdot \vec{\tau}_1 = \nabla v_h(c) \cdot \vec{\tau}_2 = 0 \Rightarrow \nabla v_h(c) = 0$
 $\Rightarrow \nabla v_h(c) \cdot \vec{\mu}_1 = \nabla v_h(c) \cdot \vec{\mu}_2 = 0$ nulové jsou i shybe volně, které

se mapují do Σ_h^P , ab ...

Př. Argýrisův Δ , kde $X_h \subset H^2(\Omega)$. $V_h = \{ v_h \in X_h; v_h = \frac{\partial v_h}{\partial n} = 0 \text{ na } P \}$.



$$v_h(a) = \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} v_h(a) = \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}} v_h(a) = \frac{\partial v_h}{\partial \vec{\tau}}(a) = \frac{\partial v_h}{\partial \vec{\tau}}(a) = 0$$

analogicky $\frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} v_h(b) = 0$

$$\Rightarrow v_h|_E = 0, \quad \frac{\partial v_h}{\partial \vec{\nu}}|_E = 0 \Rightarrow V_h \subset V.$$

Jedny 'volně' shybe volně je $\frac{\partial v_h}{\partial \vec{\nu}}(a)$. Před ovšem v a navazuje hrana $\tilde{E} \subset P$

$$\Sigma_h^P = \{ \phi \in \Sigma_h; \phi(v|_\Omega) = 0 \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), v=0 \text{ na } P, \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ na } P \}$$

v jím $\Delta u = 0$, $\Delta^2 u(a) = 0$, tedy $\partial_{\nu\nu} u(a) = 0$.

Pozn. Konkrétní prvky vedoucí ke prostor $X_h \subset C(\bar{\Omega})$ nazýváme prvky třídy C^0 . Obecně, $X_h \subset C^s(\bar{\Omega})$, $s \geq 0$ nazýváme s -m. prvky třídy C^s .

Obecné úvahy o konvergenci metody konečných prvků

Vraťme se nyní k abstraktnímu variačnímu problému (AVP) ze str. MKP2, kde hledáme $u \in V$:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

kde V, a a f splňují předpoklady uvedené ve formulaci AVP. Před touto problematiku představuje slabou formulaci vyjádřenou PDR, umíme nyní pomocí metody konečných prvků konstruovat konečné dimenzionální podprostory $V_h \subset V$, kde parametrem $h > 0$ se vztahuje k velikosti elementární triangulace. Předp. je jím sestavení pro prostory $\{V_h\}$, kde $h \rightarrow 0+$.

Každému prostoru V_h přiřadíme diskrétní řešení $u_h \in V_h$ takové, že

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

Naším cílem je sestavit prostory V_h takové způsobem, aby diskrétní řešení konvergovala k řešení AVP, tj. aby

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

Věta (Céa [Céa]) Existuje konstanta C nezávislá na podprostoru V_h taková, že

$$(*) \quad \|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Postačující podmínkou pro konvergenci tedy je, aby systém podprostorů $\{V_h\}$ splňoval

$$\forall u \in V: \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0.$$

Důkaz: $a(u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h \Rightarrow \alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) =$

$$= a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\Rightarrow \forall v_h \in V_h: \quad \alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \Rightarrow (*) \text{ platí s } C = M/\alpha.$$

Před a je symetrická, je $a(\cdot, \cdot)$ skalárním součinem na V a $\underline{u}$ je ortogonálním projekcí $\underline{u}$ na V_h (vlastně $a(u_h, v_h) = a(u, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$) vzhledem k tomuto skalárnímu součinu. V tomto případě tedy $a(u - u_h, u - u_h) = \inf_{v_h \in V_h} a(u - v_h, u - v_h)$, z čehož plyne $\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$. Odhad (*) tedy platí s "lepší" konstantou.

Nerovnost (*) nám říká, že problém odhadu chyby $\|u - u_h\|_V$ lze převést na problém aproximace prostoru V prostory V_h , tj. na vyhledání vzdálenosti $d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$ mezi $u \in V$ a podprostorem $V_h \subset V$.

Základní odhady chyb

Víme, že diskrétní řešení AVP splňuje

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V,$$

kde $V_h \subset V$ je prostor konečných prvků použitých v diskrétním problému.

Je-li $u \in Q(\Omega)$, platí tedy

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - \Pi_h u\|_V.$$

Odporůlad-li AVP globální formulaci PDE 2. řádku, je $V \subset H^1(\Omega)$ a $\|u\|_V^2 = \|u\|_{1,\Omega}^2$.

Dokážeme tedy

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} = C \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_T u\|_{1,T}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = C \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_T u\|_{1,T}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Tedy nalezneme odhad chyby $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ z redukcí na problém odhadu chyby lokální interpolace $\|u - \Pi_T(u|_T)\|_{1,T}^2$. Základním výsledkem v tomto směru je následující věta, která nám říká, že normou $|\cdot|_{k+1,p,\Omega}$ je ekvivalentní normou na faktorovém prostoru $W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$.

Věta 1 Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipshitzovskou spj. hranicí. Necht' $k \geq 0$ je přiro. číslo a $p \in [1, \infty]$. Pak existuje konstanta C závislá pouze na Ω, k a p taková, že

$$(1) \inf_{q \in P_k(\Omega)} \|v + q\|_{k+1,p,\Omega} \leq C |v|_{k+1,p,\Omega} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

Důkaz: Necht' $N = \dim P_k(\Omega)$ a necht' $f_1, \dots, f_N$ je báze duálního prostoru k $P_k(\Omega)$.

Podle Hahnova-Banachovy věty existují spojité lineární funkce na $W^{k+1,p}(\Omega)$, které jsou rozšířením uvedených funkcí a které opět označíme $f_1, \dots, f_N$. Platí tedy

$$(2) \quad \forall p \in P_k(\Omega) : f_i(p) = 0, \quad i = 1, \dots, N \Rightarrow p = 0.$$

Ukážeme, že existuje $C > 0$ tak, že

$$(3) \quad \|v\|_{k+1,p,\Omega} \leq C \left(|v|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^N |f_i(v)| \right) \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

z této nerovnosti již plyne (1): buď $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$. Pak existuje $q \in P_k(\Omega)$ tak, že $f_i(v+q) = 0, \quad i = 1, \dots, N$. Tedy

$$\|v+q\|_{k+1,p,\Omega} \leq C |v+q|_{k+1,p,\Omega} = C |v|_{k+1,p,\Omega},$$

tedy platí (1).

Dokážeme nyní rovnost (3). Předp. že neplatí. Pak $\exists \{v_n\} \subset W^{k+1,p}(\Omega) :$

$$\forall C > 0 \quad \exists v \in W^{k+1,p}(\Omega) : \|v\|_{k+1,p,\Omega} > C \left(|v|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^N |f_i(v)| \right).$$

Tedy $\exists \{v_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset W^{2+1,p}(\Omega)$ tak, že $\forall \ell \in \mathbb{N}$

$$(4) \|v_\ell\|_{2+1,p,\Omega} = 1, \quad \|v_\ell\|_{2+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^N |f_i(v_\ell)| < \frac{1}{2}.$$

Jelikož $\{v_\ell\}$ je omezená ve $W^{2+1,p}(\Omega)$, existuje podprůst, kterém opět omezená $\{v_\ell\}$ a která konverguje ve $W^{2,p}(\Omega)$ (to plyne z Rellicky věty pro $p \in [1, \infty)$ a z Ascoliho věty pro $p = \infty$). Tedy $\{v_\ell\}$ je Cauchyovská v $W^{2,p}(\Omega)$. Podle

(4) je ale $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|v_\ell\|_{2+1,p,\Omega} = 0$ a tedy $\{v_\ell\}$ je také Cauchyovská v $W^{2+1,p,\Omega}$ a tedy

i v $W^{2+1,p,\Omega}$. Jelikož $W^{2+1,p}(\Omega)$ je B.p., existuje $v \in W^{2+1,p}(\Omega)$ tak, že $\|v - v_\ell\|_{2+1,p,\Omega} \rightarrow 0$.

Podle (4) musíme mít

$$(5) \|v\|_{2+1,p,\Omega} = 1, \quad \|v\|_{2+1,p,\Omega} = 0, \quad \sum_{i=1}^N |f_i(v)| = 0.$$

Podle druhého vztahu v (5) je $D^\alpha v = 0 \quad \forall \alpha, |\alpha| = 2+1$. Z teorie distribucí plyne, že holdí $v \in P_2(\Omega)$. Podle 3. vztahu v (5) je tedy $v = 0$, což je spor s prvním vztahem v (5). $\square$

Následující věta umožňuje z odvození lokálního odhadu interpolace díky použití odhadů na první referenční elementu.

Věta 2 Necht Ω a $\hat{\Omega}$ jsou dvě omezené oblasti v $\mathbb{R}^n$ s kypch. spg. hranicí, které jsou afinně ekvivalentní, tj. $\Omega = F(\hat{\Omega})$, kde F je afinní regulární zobrazení. Necht $m \in \mathbb{N}_0$ a $p \in [1, \infty]$. Pak pro každou fci $v \in W^{m,p}(\Omega)$ patří fce $\hat{v} = v \circ F$ do prostoru $W^{m,p}(\hat{\Omega})$. Navíc platí

$$(6) \|\hat{v}\|_{m,p,\hat{\Omega}} \leq C \|B\|^m |\det B|^{-\frac{1}{p}} \|v\|_{m,p,\Omega} \quad \forall v \in W^{m,p}(\Omega),$$

$$(7) \|v\|_{m,p,\Omega} \leq C \|B^{-1}\|^m |\det B|^{\frac{1}{p}} \|\hat{v}\|_{m,p,\hat{\Omega}} \quad \forall \hat{v} \in W^{m,p}(\hat{\Omega}),$$

kde $B = \frac{DF}{d\hat{x}}$ a C závisí pouze na m a n .

(tj. $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$)

Důkaz: Necht $v \in C^m(\bar{\Omega})$. Pak $\hat{v} \in C^m(\bar{\hat{\Omega}})$ a platí pro $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\hat{x} \in \hat{\Omega}$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_i}(\hat{x}) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} v(F(\hat{x})) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_\ell}(F(\hat{x})) \underbrace{\frac{\partial F_\ell(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i}}_{B_{\ell i}}.$$

Tedy pro $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ je

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^m \hat{v}}{\partial \hat{x}_{i_1} \partial \hat{x}_{i_2} \dots \partial \hat{x}_{i_m}}(\hat{x}) \right| &= \left| \sum_{\ell_1=1}^n \sum_{\ell_2=1}^n \dots \sum_{\ell_m=1}^n \frac{\partial^m v}{\partial x_{\ell_1} \partial x_{\ell_2} \dots \partial x_{\ell_m}}(F(\hat{x})) B_{\ell_1 i_1} B_{\ell_2 i_2} \dots B_{\ell_m i_m} \right| \leq \\ &\leq \max_{|\alpha|=m} |(D^\alpha v)(F(\hat{x}))| \cdot \left(\sum_{\ell_1=1}^n |B_{\ell_1 i_1}| \right) \left(\sum_{\ell_2=1}^n |B_{\ell_2 i_2}| \right) \dots \left(\sum_{\ell_m=1}^n |B_{\ell_m i_m}| \right) \leq \\ &\leq \max_{|\alpha|=m} |(D^\alpha v)(F(\hat{x}))| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^n |B_{ij}| \right)^m \leq C(m,n) \max_{|\alpha|=m} |(D^\alpha v)(F(\hat{x}))| \cdot \|B\|^m. \end{aligned}$$

Tedy pro libovolné $p \in [1; \infty)$ je

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^m \hat{u}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(x) \right|^p &\leq C(m, n)^p \max_{|\alpha|=m} |(D^\alpha u)(F(x))|^p \cdot \|B\|^{pm} \leq \\ &\leq C(m, n)^p \|B\|^{pm} \sum_{|\alpha|=m} |(D^\alpha u)(F(x))|^p. \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{m, p, \hat{\Omega}} &= \left[\int_{\hat{\Omega}} \sum_{|\alpha|=m} |\hat{D}^\alpha \hat{u}(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq C(m, n) (\text{card}\{\alpha; |\alpha|=m\})^{\frac{1}{p}} \|B\|^m \int_{\hat{\Omega}} \sum_{|\alpha|=m} |(D^\alpha u)(F(x))|^p dx \\ &\leq C(m, n) \|B\|^m \left[\int_{\hat{\Omega}} \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\alpha|=m} |(D^\alpha u)(F(x))|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \\ &= \tilde{C}(m, n) \|B\|^m \left[\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |(D^\alpha u)(x)|^p \underbrace{\left| \det \frac{DF(x)}{Dx} \right|}_{|\det B^{-1}| = |\det B|^{-1}} dx \right]^{\frac{1}{p}} = \\ &= \tilde{C}(m, n) \|B\|^m |\det B|^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{m, p, \Omega}. \end{aligned}$$

Všechny nyní, je tato věta platí pro libovolné $u \in W^{m, p}(\Omega)$. Definujeme

operator $r: C^m(\bar{\Omega}) \rightarrow W^{m, p}(\hat{\Omega})$ vztahem $ru = u \circ F$. Pak $\|ru\|_{m, p, \hat{\Omega}} \leq C \|u\|_{m, p, \Omega} \|u\|_{m, p, \Omega}^{p-1}$.

Jelikož $C^m(\bar{\Omega})$ je hustě (ve $W^{m, p}(\Omega)$) $\exists! R \in \mathcal{L}(W^{m, p}(\Omega), W^{m, p}(\hat{\Omega}))$: $Ru = ru \forall u \in C^m(\bar{\Omega})$.

Je-li $v \in W^{m, p}(\Omega)$, pak $\exists \{v_n\} \subset C^m(\bar{\Omega})$: $\|v - v_n\|_{m, p, \Omega} \rightarrow 0$. Předtím tedy

$$\|Rv - ru\|_{m, p, \hat{\Omega}} \leq \|R(v - v_n)\|_{m, p, \hat{\Omega}} + \|(v_n - v) \circ F\|_{m, p, \hat{\Omega}} \leq C \|v - v_n\|_{m, p, \Omega} \rightarrow 0,$$

tj. $Rv = ru \circ F$, tedy $ru \circ F \in W^{m, p}(\hat{\Omega})$. Navíc

$$\|\hat{u}\|_{m, p, \hat{\Omega}} = \|Ru\|_{m, p, \hat{\Omega}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Rv_n\|_{m, p, \hat{\Omega}} \leq \tilde{C}(m, n) \|B\|^m |\det B|^{-\frac{1}{p}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{m, p, \Omega} \right),$$

tedy věta (6) platí pro lib. $p \in [1; \infty)$.

Zbývá ukázat, že věta platí i pro $p = \infty$. Je-li $v \in W^{m, \infty}(\Omega)$, pak $v \in W^{m, p}(\Omega) \forall p \in [1; \infty)$, neboť Ω je omezená. Tedy podle výše dokázaného je $\hat{u} \in W^{m, p}(\hat{\Omega}) \forall p \in [1; \infty)$. Jelikož $\|v\|_{m, p, \Omega} \leq \|v\|_{m, \infty, \Omega} [\text{card}\{\alpha; |\alpha| \leq m\} \cdot |\Omega|]^{\frac{1}{p}} \leq \tilde{C}(m, m, \Omega) \|v\|_{m, \infty, \Omega} \forall p \in [1, \infty)$ platí $\forall \alpha, |\alpha| \leq m$ a $\forall p \in [1, \infty)$.

$$\|\hat{D}^\alpha \hat{u}\|_{0, p, \hat{\Omega}} \leq \|\hat{u}\|_{|\alpha|, p, \hat{\Omega}} \leq C(m, n) \|B\|^{|\alpha|} |\det B|^{-\frac{1}{p}} \|v\|_{m, p, \Omega} \leq \tilde{C}(m, m, \Omega, B) \|v\|_{m, \infty, \Omega}.$$

Jelikož pravá strana nezávisí na p , platí $\hat{D}^\alpha \hat{u} \in L^\infty(\hat{\Omega}) \forall |\alpha| \leq m$. Tedy $\hat{u} \in W^{m, \infty}(\hat{\Omega})$.

Jelikož

$$\forall w \in L^\infty(\Omega): \|w\|_{0, \infty, \Omega} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|w\|_{0, p, \Omega}$$

a podle (6) platí pro $v \in W^{m, \infty}(\Omega)$

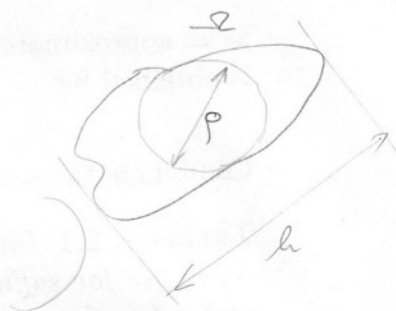
$$\|\hat{u}\|_{m, p, \hat{\Omega}} \leq C \|B\|^m |\det B|^{-\frac{1}{p}} \|v\|_{m, p, \Omega} \forall p \in [1, \infty),$$

dostáváme limitu přechodem (6) i pro $p = \infty$.

Nevrátíme (7) plyne z (6) záměnou Ω a $\hat{\Omega}$ (platí $\hat{\Omega} = F^{-1}(\Omega)$, $\frac{DF^{-1}}{Dx} = B^{-1}$). $\square$

Pro praktické použití uvedeť věť je třeba odhadnout normy $\|B\|$ a $\|B^{-1}\|$ pomocí jednoduchých geometrických veličin příslušných množin Ω a $\hat{\Omega}$.
Zavedeme následující značení

$$(8) \begin{cases} h = \text{diam}(\Omega), & \hat{h} = \text{diam}(\hat{\Omega}), \\ \rho = \sup \{ \text{diam}(K); K \text{ je koule obsažená v } \Omega \}, \\ \hat{\rho} = \sup \{ \text{diam}(\hat{K}); \hat{K} \text{ je koule obsažená v } \hat{\Omega} \}. \end{cases}$$

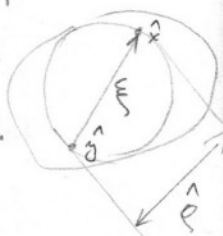


Věta 3 Necht $F(x) = Bx + b$ je afinní regulární zobrazení a necht $\hat{\Omega}$ a $\Omega = F(\hat{\Omega})$ jsou dvě afinně ekvivalentní podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Pak platí

$$\|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}}, \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho}.$$

Důkaz: Platí $\|B\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\xi\|=\hat{\rho}} \|B\xi\|$. Jestliže $\xi \in \mathbb{R}^n$ splňuje $\|\xi\| = \hat{\rho}$, pak

existují body $x, y \in \hat{\Omega}$ takové, že $\xi = x - y$. Platí $B\xi = Bx - By = F(x) - F(y) \in \Omega$ (ať $F(x), F(y) \in \Omega$). Tedy $\|B\xi\| \leq h \Rightarrow \|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}}$.



Druhá nerovnost plyne z první vědomě-li, že $\hat{\Omega} = F^{-1}(\Omega)$ a

$$F^{-1}(x) = B^{-1}x - B^{-1}b. \quad \square$$

Následující věta ukazuje, proč je důležité, aby prostory v definici konečných prvků obsahovaly polynomy.

Věta 4 Necht $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipshitzovými hranicemi a necht pro nějaké $k, m \in \mathbb{N}_0$ a $p, q \in [1, \infty]$ platí $W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \subset W^{m,q}(\hat{\Omega})$. Necht $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}), W^{m,q}(\hat{\Omega}))$ je zobrazení, které splňuje

$$(a) \quad \hat{\Pi} \hat{\rho} = \hat{\rho} \quad \forall \hat{\rho} \in P_2(\hat{\Omega}).$$

Pro libovolnou oblast Ω , která je afinně ekvivalentní množině $\hat{\Omega}$, definujeme zobrazení Π_Ω vztahem

$$\Pi_\Omega v = \hat{\Pi} \hat{v} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

$$(b) \quad \Pi_\Omega v = (\hat{\Pi}(v \circ F)) \circ F^{-1} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

Pak existuje konstanta $\hat{C}$ závislá pouze na $\hat{\Pi}, \hat{\Omega}$ a k, m, p, q taková, že platí

$$\|v - \Pi_\Omega v\|_{m,q,\Omega} \leq \hat{C} [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} \|v\|_{k+1,p,\Omega} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega),$$

kde h, ρ jsou definovány vztahy (8) a $\mu(\Omega)$ značí míru množiny Ω .

Důkaz: Podle (9) platí pro lib. $\hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) = \hat{P} \in P_k(\hat{\Omega})$

$$\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v} = \hat{v} + \hat{p} - \hat{\Pi}(\hat{v} + \hat{p}) = (I - \hat{\Pi})(\hat{v} + \hat{p}),$$

kde I je identita ~~zobrazení~~ z $W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ do $W^{m,q}(\hat{\Omega})$, které je podle předp. spoj. Platí tedy podle věty 1

$$\|\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v}\|_{m,q,\hat{\Omega}} \leq \|I - \hat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}), W^{m,q}(\hat{\Omega}))} \sup_{\hat{p} \in P_k(\hat{\Omega})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \leq$$

$$\leq C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}, k, m, p, q) \|\hat{v}\|_{k+1,p,\hat{\Omega}}$$

Jelikož $\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v} = \widehat{v - \Pi_{\Omega} v}$, plyne z věty 2, že

$$\|v - \Pi_{\Omega} v\|_{m,q,\Omega} \leq C(m,n) \|B^{-1}\|^m |\det B|^{\frac{1}{q}} \|\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v}\|_{m,q,\hat{\Omega}},$$

$$\|\hat{v}\|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \leq C(k,n) \|B\|^{k+1} |\det B|^{-\frac{1}{p}} \|v\|_{k+1,p,\Omega}.$$

Tedy pro libovolné $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ je

$$\|v - \Pi_{\Omega} v\|_{m,q,\Omega} \leq C \|B^{-1}\|^m |\det B|^{\frac{1}{q}} \|\hat{v}\|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \leq$$

$$\leq \tilde{C} \|B^{-1}\|^m \|B\|^{k+1} |\det B|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|v\|_{k+1,p,\Omega}.$$

Podle věty 3 je $\|B^{-1}\|^m \|B\|^{k+1} \leq \frac{h^m}{\varphi^m} \cdot \frac{h^{k+1}}{\varphi^{k+1}} = C(\hat{\Omega}) \frac{h^{k+1}}{\varphi^m}$, jelikož

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} dx = \int_{F^{-1}(\hat{\Omega})} |\det B| d\hat{x} = \mu(\hat{\Omega}) |\det B|, \text{ dostáváme větu. } \square$$

Z věty 4 plyne následující důležitý výsledek:

Věta 5 Necht' $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ je lineární prvok a necht' $m, k \in \mathbb{N}_0$ a $p, q \in [1, \infty]$ jsou konvergentní čísla, je platí

$$(10) \quad \hat{\Sigma} \subset [W^{k+1,p}(\hat{T})]', \quad W^{k+1,p}(\hat{T}) \subset W^{m,q}(\hat{T}), \quad P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset W^{m,q}(\hat{T}).$$

Pak existuje konstanta $\hat{C}$ taková, že pro všechny konečné prvky (T, P, Σ) afinně ekvivalentní prvku $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ platí

$$(11) \quad \|v - \Pi_T v\|_{m,q,T} \leq \hat{C} [\mu(T)]^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{h_T^{k+1}}{\varphi_T^m} \|v\|_{k+1,p,T} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(T),$$

kde $\Pi_T v$ značí P_T interpolaci fce v a

$$\mu(T) = \int_T dx, \quad h_T = \text{diam}(T), \quad \varphi_T = \sup \{ \text{diam}(K); K \subset T, K \text{ je Simple} \}.$$

Důkaz: Necht' $\hat{\Sigma} = \{\hat{\Phi}_i\}_{i=1}^N$ a necht' $\hat{p}_i \in \hat{P}$ jsou báze fce lin. prvku $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Pro $\hat{P}$ -interpolaci lib. fce $\hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{T})$ je definována vztahem

$$\hat{\Pi} \hat{v} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\hat{v}) \hat{p}_i.$$

Tedy $\hat{\Pi}$ je $\hat{P}$ -interpolace, která z $W^{k+1,p}(\hat{T})$ do

Jeliže $\|\hat{\Pi} \hat{v}\|_{m, q, \hat{\Gamma}} \leq \sum_{i=1}^N |\hat{\Phi}_i(\hat{v})| \cdot \|\hat{p}_i\|_{m, q, \hat{\Gamma}} \leq \sum_{i=1}^N \|\hat{\Phi}_i\|_{[W^{k+1, p}(\hat{\Gamma})]'} \cdot \|\hat{p}_i\|_{m, q, \hat{\Gamma}} \cdot \|\hat{v}\|_{k+1, p, \hat{\Gamma}}$
 $= \hat{C} \|\hat{v}\|_{k+1, p, \hat{\Gamma}},$

je $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1, p}(\hat{\Gamma}), W^{m, q}(\hat{\Gamma}))$. Všechny $\hat{\Pi} \hat{p} = \hat{p} \quad \forall \hat{p} \in \hat{P} \supset P_2(\hat{\Gamma})$

a $\widehat{\Pi_T v} = \hat{\Pi} \hat{v} \quad \forall v \in W^{k+1, p}(\Gamma)$. Je to tedy splněný všechny předpoklady věty 4 a důležitě zjednoduše rovnost (11). $\square$

Pozn. Podívejme se, za jakých podmínek jsou splněny předpoklady (10). Ve všech příslušných konečných prvku jsou $\hat{P} = P_2(\hat{\Gamma})$ nebo $\hat{P} = Q_2(\hat{\Gamma})$, tedy podmínka

$P_2(\hat{\Gamma}) \subset \hat{P} \subset W^{m, q}(\hat{\Gamma})$ platí pro všechny $k > 0$ a $\forall m, q$.

Podmínka $W^{k+1, p}(\hat{\Gamma}) \hookrightarrow W^{m, q}(\hat{\Gamma})$ je právě podmínkou na čísla k, p, m, q (viz Sobolevovy věty a poznámky). Vyšetřeme nakonec platnost předpokladu

(*) $\hat{\Sigma}_1 \subset [W^{k+1, p}(\hat{\Gamma})]'$.

Uvažujme nejprve Lagrangeovy konečné prvky. Buď $\hat{\Phi} \in \hat{\Sigma}_1$, Pak $\hat{\Phi}$ je definován na $C(\hat{\Gamma})$ a $\exists \hat{x} \in \hat{\Gamma} : \hat{\Phi}(\hat{v}) = \hat{v}(\hat{x}) \quad \forall \hat{v} \in C(\hat{\Gamma})$.

Tedy $|\hat{\Phi}(\hat{v})| \leq \|\hat{v}\|_{0, \infty, \hat{\Gamma}} \quad \forall \hat{v} \in C(\hat{\Gamma})$. Necht $\frac{m}{p} < k+1$ (Pro $m=2, 3$ a $p=2$ je to splněno $\forall k \geq 1$).
Pak $W^{k+1, p}(\hat{\Gamma}) \hookrightarrow C(\hat{\Gamma})$,
a tedy

$\|\hat{v}\|_{0, \infty, \hat{\Gamma}} \leq C \|\hat{v}\|_{k+1, p, \hat{\Gamma}} \quad \forall \hat{v} \in W^{k+1, p}(\hat{\Gamma})$

Pak $|\hat{\Phi}(\hat{v})| \leq C \|\hat{v}\|_{k+1, p, \hat{\Gamma}} \quad \forall \hat{v} \in W^{k+1, p}(\hat{\Gamma})$ a tedy platí (*), tedy

je-li $(\hat{\Gamma}, \hat{P}, \hat{\Sigma}_1)$ konformní konečný prvek, pak funkce ze $\hat{\Sigma}_1$ jsou definovány na $C^s(\hat{\Gamma})$ pro všechny $s > 0$ a platí

$|\hat{\Phi}(\hat{v})| \leq C \|\hat{v}\|_{s, \infty, \hat{\Gamma}} \quad \forall \hat{v} \in C^s(\hat{\Gamma}), \hat{\Phi} \in \hat{\Sigma}_1,$

je-li $\frac{m}{p} < k+1-s$, pak

$W^{k+1, p}(\hat{\Gamma}) \hookrightarrow C^s(\hat{\Gamma}),$

a tudíž $\|\hat{v}\|_{s, \infty, \hat{\Gamma}} \leq C \|\hat{v}\|_{k+1, p, \hat{\Gamma}} \quad \forall \hat{v} \in W^{k+1, p}(\hat{\Gamma})$. Opět tedy platí (*).

Funkce ze $\hat{\Sigma}_1$ mohou být též definovány pomocí integrálů. Necht

např. $\hat{\Phi}(\hat{v}) = \frac{1}{|\hat{\Gamma}|} \int_{\hat{\Gamma}} \hat{v} d\hat{x}$. Pak $\hat{\Phi} \in [L^1(\hat{\Gamma})]'$. Je-li $\hat{\Gamma}$ regulérní, $\hat{E}$ jeho hrana a $\hat{\Phi}(\hat{v}) = \frac{1}{|\hat{E}|} \int_{\hat{E}} \hat{v} d\hat{\sigma}$, pak pro $\hat{v} \in H^1(\hat{\Gamma})$ je $\Rightarrow \hat{\Phi} \in [W^{k+1, p}(\hat{\Gamma})]'$ $\forall k \geq 0$ a $p \in [1, \infty]$.
 $|\hat{\Phi}(\hat{v})| \leq \frac{1}{|\hat{E}|} \|\hat{v}\|_{0, 1, \hat{\Gamma}} \leq C \|\hat{v}\|_{1, \hat{\Gamma}},$ tedy $\hat{v} \in [H^1(\hat{\Gamma})]'$.

Speciální případ $p=q=2, \frac{h_T}{\varrho_T} \leq 0$ pro daných příkladů: $W^{k+1, p}(\hat{\Gamma}) \hookrightarrow C^s(\hat{\Gamma}), k+1 \geq m, P_2 \subset \hat{P}$
 $\Rightarrow$ TABULKA

Aproximační vlastnosti prostorů konečných prvků

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s Lipschitzovskou spjatou hranicí a nechť $\{\mathcal{T}_h\}$ je systém triangulací oblasti Ω splňující požadavky (MKP1). Každé množině $T \in \mathcal{T}_h$ nechť je přiřazen konečný prvek (T, P_T, Σ_T) a nechť $\{X_h\}$ je příslušný systém prostorů konečných prvků, tj:

$$X_h = \{v_h \in L^2(\Omega); v_h|_T \in P_T \forall T \in \mathcal{T}_h, \Phi_{T,i}(v_h|_T) = \Phi_{\tilde{T},i}(v_h|_{\tilde{T}}) \forall T, \tilde{T} \in \mathcal{T}_h, i=1, \dots, N_h\}$$

Předpokládáme, že parametry h splňují podmínku $h_T \leq h \forall T \in \mathcal{T}_h$ (obvykle $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$).

Dále předpokládáme, že platí

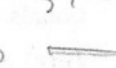
(H1) Systém triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$ je regulární, tj: existuje konstanta σ taková, že

$$(H2) \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \forall h$$

a platí $h \rightarrow 0$.

(H2) Existuje konečně mnoho referenčních konečných prvků $(\hat{T}_1, \hat{P}_1, \hat{\Sigma}_1), \dots, (\hat{T}_M, \hat{P}_M, \hat{\Sigma}_M)$ takových, že $\forall h$ a $\forall T \in \mathcal{T}_h$ je konečný prvek (T, P_T, Σ_T) afinně ekvivalentní jednomu z těchto referenčních konečných prvků.

(H3) viz dále

Pozn. Některé (H2) zaručuje, že elementy triangulace nelze pro $h \rightarrow 0$ přilížit "placaté". Pro trojúhelníky je podmínka (H2) ekvivalentní tomu, že existuje $\theta_0 > 0$ takové, že $\forall T \in \mathcal{T}_h$ jsou všechny úhly o T větší než θ_0 . Některé se tedy, že bychom pro $h \rightarrow 0$ dostávali trojúhelníky , , . Nicméně i pro takového trojúhelníky existuje interpolace konic a lze je tedy považovat za užitečné předpoklady pro diskretizaci, avšak příslušné odhady jsou mnohem složitější, a proto zde takového elementu nelze uvažovat.

Prostor $Q(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, je definován X_h -interpolací operátor Π_h splňuje

(H3) Prostor X_h splňuje: $(\Pi_h v)|_T = \Pi_h(v|_T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v \in Q(\Omega)$.

$$\Pi_h v \in V_h \quad \forall v \in Q(\Omega) \cap H^1_0(\Omega),$$

kde $Q(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ bude specifikovat podprostor.

(H3) dříve formulováno - prostor $Q(\Omega)$ ex. vždy

→ v tom je schválně předpoklad, že $Q(\Omega)$ bude se stejným způsobem vybráno, aby bylo možné definovat $C^\infty(\Omega)$

Jeliže prvotný X_h obecně obsahuje konjugát funkce nebo funkce s nepříznivými derivacemi, zavádíme následující diskrétní analogie norm a norm prvotní $W^{l,p}(\Omega)$ pro $p \in [1, \infty)$:

$$|v|_{l,p,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,p,T}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|v\|_{l,p,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{l,p,T}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(pro $p = \infty$:
 $|v|_{l,\infty,h} = \max_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,\infty,T}$, $\|v\|_{l,\infty,h} = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{l,\infty,T}$.)
 $|v|_{l,p,h} = |v|_{l,p,\Omega}$, $\|v\|_{l,p,h} = \|v\|_{l,p,\Omega} \quad \forall v \in W^{l,p}(\Omega).$

Věta 6 Necht $\sqrt[k]{k, l, r \in \mathbb{N}_0}$ a $p \in [1, \infty]$ jsou taková čísla, že referenční konečné prvky splňují

$$(13) \quad \hat{\Sigma}_i \subset [W^{l+1,p}(\hat{T}_i)]', \quad P_k(\hat{T}_i) \subset \hat{P}_i \subset W^{r,p}(\hat{T}_i), \quad i=1, \dots, M.$$

Dále necht $Q(\Omega) \supset W^{l+1,p}(\Omega)$.

Pak existuje konstanta C nezávislá na h a taková, že pro libovolné $m, s \in \mathbb{N}_0$ splňující

$$l \leq s \leq k, \quad 0 \leq m \leq \min\{r, s+1\}$$

platí

$$(14) \quad |v - \Pi_h v|_{m,p,h} \leq C h^{s+1-m} |v|_{s+1,p,\Omega} \quad \forall v \in W^{s+1,p}(\Omega),$$

kde $\Pi_h v$ je X_h -interpolace funkce v (předp. (13) $\Rightarrow Q(\Omega) = W^{l+1,p}(\Omega)$, $(H^1) \text{ platí } \Pi_h v|_T = \Pi_T(v|_T)$ $\forall v \in W^{l+1,p}(\Omega)$).

Důkaz: Necht k, l, r, p, m, s splňují předpoklady věty. Pak

$$\hat{\Sigma}_i \subset [W^{s+1,p}(\hat{T}_i)]', \quad W^{s+1,p}(\hat{T}_i) \hookrightarrow W^{m,p}(\hat{T}_i),$$

$$P_s(\hat{T}_i) \subset \hat{P}_i \subset W^{m,p}(\hat{T}_i), \quad i=1, \dots, M.$$

Podle věty 5 tedy pro libovolné $T \in \mathcal{T}_h$ platí (tedy dle (12))

$$|v - \Pi_T v|_{m,p,T} \leq C h_T^{s+1-m} |v|_{s+1,p,T} \quad \forall v \in W^{s+1,p}(T).$$

Umocníme-li tuto nerovnost na p a posčítáme-li přes všechny triangulace, dostaneme nerovnost z věty. $\square$

Pozn. Je zřejmé, že (14) platí i pro $\|v - \Pi_h v\|_{m,p,h}$.

Pozn. Pro všechny uvedené příklady rovností první platí $\hat{P}_i \subset W^{r,p}(\hat{T}_i)$

$\forall r \in \mathbb{N}$. Pro lagrangeovské kon. prvky v $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$ platí (13) s $l=1$ a

$$p > \frac{3}{2}.$$

Věta 8 Necht' Γ_1, Γ_2 a necht' existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\sum_{i=1}^l \subset [W^{k+1,\infty}(\hat{\Gamma}_i)]', \quad P_k(\hat{\Gamma}_i) \subset \hat{P}_i \subset H^1(\hat{\Gamma}_i), \quad i=1, \dots, M.$$

Pak $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$.

Důkaz: Ze uvedených předpokladů platí podle věty 5 $\forall T \in \mathcal{T}_h$

$$\|v - \Pi_T v\|_{1,T} \leq \hat{C}[\mu(T)]^{\frac{1}{2}} h_T^k |v|_{k+1,\infty,T} \quad \forall v \in W^{k+1,\infty}(T).$$

Speciálně pro $v \in C^\infty(\Omega)$ je $(\Pi_h v)|_T = \Pi_T(v|_T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$ a tedy

$$(*) \quad \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} = \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v - \Pi_T(v|_T)\|_{1,T}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \hat{C}[\mu(\Omega)]^{\frac{1}{2}} h^k |v|_{k+1,\infty,\Omega}$$

Podle definice prostoru V_h platí $\Pi_h v \in V_h \quad \forall v \in C^\infty(\Omega)$.

Buď $\varepsilon > 0$. Jelikož prostor $C^\infty(\Omega)$ je hustý ve V , existuje $v_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ tak, že

$$\|u - v_\varepsilon\|_{1,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále podle (*) existuje h_ε tak, že

$$\|v_\varepsilon - \Pi_h v_\varepsilon\|_{1,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall h < h_\varepsilon.$$

Tedy

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \leq \|u - \Pi_h v_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq \|u - v_\varepsilon\|_{1,\Omega} + \|v_\varepsilon - \Pi_h v_\varepsilon\|_{1,\Omega} < \varepsilon \quad \forall h < h_\varepsilon,$$

což znamená, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} = 0$$

a věta plyne ze Céaova ^{věty} lemmatu. $\square$

Pozn. Platí, že $W^{k+1,\infty}(\hat{\Gamma}_i) \subset C^s(\bar{\Omega})$ pro $s \in \{0, 1, \dots, k\}$. Předpoklady věty jsou tedy splněny, pokud chceme volat nejsem definovaný pomocí vyšších derivací než je k . To je splněno u všech konvexních prvků, s nimiž jsme se dříve setkali.

Odhad chyby $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$

Výše uvedené odhady byly založeny na Céaově lemmatu, které nám umožňuje pro AVP odhadnout chybu $\|u - u_h\|_V$. Pripomeňme, že $u \in V$, $u_h \in V_h \subset V$ a platí

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde $f \in V'$ a V je h.p. s normou $\|\cdot\|_V$.

Nechť H je dální H.p. s normou $\|\cdot\|_H$ a skal. součinem $(\cdot, \cdot)_H$. Předp. je

$$(15) \quad V \subseteq H, \quad \forall V \subset H \text{ a } \|v\|_H \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Naším cílem je získat odhad pro chybu $\|u - u_n\|_H$, který můžeme dostat už jen z konvergence uš jež/plah' pro chybu $\|u - u_n\|_V$. V případech, kdy $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$ (tak, jak tomu bylo výše), je typická volba $H = L^2(\Omega)$. Naším hlavním cílem tedy je získat lepší odhad v L^2 -normě (tak jako chyba interpolace uš v L^2 -normě ušm' rád konvergence uš v H^1 -normě).

K AVP uvažujeme adjungovaný problém najít $\varphi \in V$ tak, že

$$(16) \quad a(v, \varphi) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Z Lax-Milgramova lemmatu plyne, že tento problém má právě jedno řešení. Speciálně můžeme uvažovat $\langle f, v \rangle = (g, v)_H$, kde $g \in H$. Jeliž $\forall v \in V$ je

$$|(g, v)_H| \leq \|g\|_H \|v\|_H \leq C \|g\|_H \|v\|_V,$$

definujeme $(g, v)_H$ zřejmě pro $v \in V$. Tedy

$$\forall g \in H \quad \exists! \varphi_g \in V : \quad a(v, \varphi_g) = (g, v)_H \quad \forall v \in V.$$

Věta 9 (Aubin-Nitsche lemma) Nechť $V \subseteq H$. Pak

$$\|u - u_n\|_H \leq M \|u - u_n\|_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_n \in V_n} \|\varphi_g - v_n\|_V \right\}.$$

Důkaz: Jeliž $u - u_n \in V$, pak $a(u - u_n, v_n) = 0 \quad \forall v_n \in V_n$, platí

$$(g, u - u_n)_H = a(u - u_n, \varphi_g) = a(u - u_n, \varphi_g - v_n) \quad \forall v_n \in V_n.$$

Tedy

$$(g, u - u_n)_H \leq \sup_{g \in H} \inf_{v_n \in V_n} a(u - u_n, \varphi_g - v_n) \leq M \|u - u_n\|_V \inf_{v_n \in V_n} \|\varphi_g - v_n\|_V.$$

Věta uš' plyne ze vztahu

$$\|u - u_n\|_H = \sup_{g \in H} \frac{(g, u - u_n)_H}{\|g\|_H}. \quad \square$$

Předpokládáme nyní opět, že AVP reprezentuje slabou formulaci PDR daného řádu def. v Ω s homogenní Dirichletovými okrajovými podmínkami, tj. $V = H_0^1(\Omega)$. Pak za předpokladu uš 7 platí pro $u \in H^{2,1}(\Omega)$ odhad

$$\|u - u_n\|_{1,\Omega} \leq Ch^2 |u|_{2,1,\Omega}.$$

Věta 9 umožňuje ukázat, že řád konvergence chyby $\|u - u_n\|_{0,\Omega}$ je ještě lepší, pokud adjungovaný problém je regulární. V dální tedy uvažujeme $H = L^2(\Omega)$.

Definice Adjungovaný problém (16) je regulární, jeliž

$$1) \quad \varphi_g \in H^2(\Omega) \quad \forall g \in L^2(\Omega),$$

$$2) \quad \exists C > 0 : \quad \|\varphi_g\|_{2,\Omega} \leq C \|g\|_{0,\Omega} \quad \forall g \in L^2(\Omega).$$

Pozn. Regularitu lze dobit za předpokladu, že funkce v PDR jsou dostatečně hladké, Ω je dost. hladká nebo např. polygonální a konvexní. Pokud máme nehomogenní zdroj. problém, pak můžeme mít dost. hladké. Michale-lic vzhledem k tomu, že zdroj. problém, pak můžeme mít dost. hladké. Michale-lic vzhledem k tomu, že zdroj. problém, pak můžeme mít dost. hladké. Michale-lic vzhledem k tomu, že zdroj. problém, pak můžeme mít dost. hladké.

Věta 10 Necht' platí předpoklady (H1) a (H2) a necht' $\hat{\Sigma}_i = [H^2(\hat{T}_i)]'$, $i=1, \dots, M$, Necht' (H3), (H4) platí a $Q(\Omega) \supset H^2(\Omega)$.

a $\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ necht' je $\Pi_h v \in V_h$ a $(\Pi_h v)|_\Gamma = \Pi_\Gamma(v|_\Gamma) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$.
Necht' existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$P_k(\hat{T}_i) \subset \hat{P}_i \subset H^1(\hat{T}_i), \quad i=1, \dots, M,$$

a necht' řešením $u \in V$ variabilního problému splňuje $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Konkrétně předpokládáme, že adjungovaný problém (16) je regulární. Pak existuje konstanta C nezávislá na h taková, že

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}.$$

Důkaz: Podle věty 6 platí

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C h |v|_{2,\Omega} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Je tedy pro libovolné $g \in L^2(\Omega)$

$$\inf_{v_h \in V_h} \| \varphi_g - v_h \|_{1,\Omega} \leq \| \varphi_g - \Pi_h \varphi_g \|_{1,\Omega} \leq C h | \varphi_g |_{2,\Omega} \leq \tilde{C} h \|g\|_{0,\Omega}.$$

Tedy podle věty 9

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq \tilde{C} h \|u - u_h\|_{1,\Omega} \stackrel{\text{věta 7}}{\leq} \tilde{C} h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}. \quad \square$$

Pozn. Předpoklad $\hat{\Sigma}_i = [H^2(\hat{T}_i)]'$ lze nahradit tím, alych máme operátor Π_h aplikovat na funkci φ_g . Pokud bychom chtěli provést toto předpoklad nahradit, ~~že to Π_h vstoupí nějakým způsobem, např. Lagrangeovy operátor.~~

Pozn. Odhad u v H^1 normě a L^2 normě, které jsme už viděli, jsou optimální v tom smyslu, že řady konvergence jsou stejné jako když bychom dostali řešení u malých h u interpolací f_h u. Důležitá je řada konvergence pro $\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}$ má tedy stejný řád, jaký řád konvergence máme pro jednotlivé h když bychom chtěli v L^2 normě a v H^1 normě u diskrétního řešení. Je však třeba mít na paměti, že řád konvergence chybí $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ může být dokonce $O(h^{r-m})$, je-li $u \in H^r(\Omega)$. Je-li tedy např. pouze $u \in H^2(\Omega)$, bude obecně pro libovolné h konvergenční rychlost $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h)$ a $\|u - u_h\|_{0,\Omega} = O(h^2)$. Ne-li řešení globálně příliš hladké, lze přesto

Pro $f \in \tilde{u}_h$ je replika výše odvozené výsledky založené na Céaově lemmatu, jelikož pravá strana problému (20) závisí na h . Platí ale

$$u - u_h = \tilde{u} + \tilde{u}_b - \tilde{u}_h - \tilde{u}_{bh} = (\tilde{u} - \tilde{u}_h) + (\tilde{u}_h - \tilde{u}_b) + (\tilde{u}_b - \tilde{u}_{bh}),$$

kde $\tilde{u}_h$ je řešení problému (19). Jelikož

$$a(\tilde{u}_h - \tilde{u}_b, v_h) = a(\tilde{u}_{bh} - \tilde{u}_b, v_h),$$

platí

$$\|\tilde{u}_h - \tilde{u}_b\|_{1,\Omega} \leq \frac{H}{\alpha} \|\tilde{u}_{bh} - \tilde{u}_b\|_{1,\Omega}.$$

Dobudeme tedy

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{1,\Omega} + C \|\tilde{u}_b - \tilde{u}_{bh}\|_{1,\Omega}.$$

Jelikož pro $\tilde{u} - \tilde{u}_h$ výše odvozené odhady platí, platí tyto odhady při vhodné volbě $\tilde{u}_{bh}$ i pro $u - u_h$.

Samoostatně se volí volit $\tilde{u}_{bh} \in X_h$. Pak diskrétní řešení závisí na tom, jak je $\tilde{u}_b$ definováno pro "nízké" stupně volnosti (hodnoty $\phi(\tilde{u}_{bh})$ pro $\phi \in \Sigma_h' \setminus \Sigma_h^{\partial\Omega}$).

Můžeme tedy např. položit

$$(21) \begin{cases} \phi(\tilde{u}_{bh}) = \phi(\Pi_h \tilde{u}_b) = \phi(\tilde{u}_b) & \forall \phi \in \Sigma_h^{\partial\Omega}, \\ \phi(\tilde{u}_{bh}) = 0 & \forall \phi \in \Sigma_h' \setminus \Sigma_h^{\partial\Omega}, \end{cases}$$

pokud je Π_h pro $\tilde{u}_b$ definováno. Ve většině případů závisí pro $\phi \in \Sigma_h^{\partial\Omega}$ hodnota $\phi(\tilde{u}_b)$ pouze na $\tilde{u}_b|_{\partial\Omega} = u_b$ (např. pro všechny Lagrangeovy kon. prvky). Pro $\tilde{u}_b$ definované vztahy (21) pak závisí pouze na u_b a nicoli na volbě $\tilde{u}_b$.

Numerická integrace

Odporůči-li AUP slabší formulaci výše PDR, pak bilineární forma a i pravá strana f jsou definovány pomocí integrálu přes oblast Ω a části hranice $\partial\Omega$. V diskrétním problému je v každé případě vhodné počítat tyto integrály pouze přibližně, pomocí vhodné numerické kvadratury.

Nechť $\{T_h\}$ je systém triangulací oblasti Ω a $\{N_h\}$ systém prostorů lineárních prvků, o nichž předpokládáme také jako při vyšetřování konvergence diskretizace řešení. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že všechny lineární prvky $(T, P_T, \hat{T})$, $T \in T_h, h > 0$, jsou ekvivalentní jednomu referenčnímu lineárnímu prvku $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\hat{T}})$ (tj. v (H_2) je $M=1$).

Na referenčním elementu $\hat{T}$ zavádíme kvadraturní vzorec

$$\sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e \hat{\varphi}(\hat{b}_e),$$

pro aproximaci integrálu $\int_{\hat{T}} \hat{\varphi} d\hat{x}$, přičemž $\hat{\omega}_e$ jsou kladná reálná čísla zvaná váhy a $\hat{b}_e \in \hat{T}$ jsou body zvané uzly. (Je možno uvažovat také $\hat{\omega}_e < 0$ a $\hat{b}_e \notin \hat{T}$ - nikdo dilet.) Budeme typobolicky psát

$$(22) \int_{\hat{T}} \hat{\varphi} d\hat{x} \sim \sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e \hat{\varphi}(\hat{b}_e).$$

Jelikož pro lib. $T \in T_h$ ex. afinní rep. zobrazení $F_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + b_T$ platí, že $F_T(\hat{T}) = T$, platí

$$\int_T \varphi dx = (\det B_T) \int_{\hat{T}} \hat{\varphi} d\hat{x},$$

zde $\hat{\varphi} = \varphi \circ F_T$ a předp. že $\det B_T > 0$ (BÚNO-víme, že $\det B_T = \text{cond.} \neq 0$). Dostáváme tak na libovolném kvadraturním vzorec

$$\sum_{e=1}^L \omega_{e,T} \varphi(b_{e,T}) \sim \int_T \varphi dx,$$

zde

$$\omega_{e,T} = (\det B_T) \hat{\omega}_e \quad (\text{váhy}),$$

$$b_{e,T} = F_T(\hat{b}_e) \quad (\text{uzly}), \quad e=1, \dots, L.$$

Zavádíme dle kvadraturní formule

$$E_T(\varphi) = \int_T \varphi dx - \sum_{e=1}^L \omega_{e,T} \varphi(b_{e,T}), \quad \text{resp.} \quad \hat{E}(\hat{\varphi}) = \int_{\hat{T}} \hat{\varphi} d\hat{x} - \sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e \hat{\varphi}(\hat{b}_e).$$

Platí

$$E_T(\varphi) = (\det B_T) \hat{E}(\hat{\varphi}).$$

Je třeba, že $\forall k \in \mathbb{N}$ existují veličiny tak, že $(*) \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \quad \forall \hat{\phi} \in P_k(\hat{\Gamma})$.

z praktických důvodů je však vhodné používat takové kvadraturní formule, které jsou definovány pomocí co nejmenšího počtu bodů a přitom splňují (*) pro dané $\hat{\Gamma}$. Příklady takových kvadraturních formulí uvedeme později.

Předpokládáme nyní pro jednoduchost, že AVP je slabou formulací úlohy

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} = f \quad \text{v } \Omega, \quad u=0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde $(\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ a }) \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega)$ jsou definovány rovnice na $\bar{\Omega}$.

Je tedy

$$V = H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx.$$

Předpokládáme, že $\exists \theta > 0$:

$$(23) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Pak jsou splněny všechny požadavky existence AVP.

Nyní položíme

$$V_h = \{v_h \in X_h; \phi(v_h) = 0 \quad \forall \phi \in \Sigma_h^{\partial\Omega}\}$$

a předpokládáme, že $V_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Důležitou roli hraje konformní diskrétnost, tedy diskrétní řešení $u_h \in V_h$ splňuje

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

Přitom

$$a(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx, \quad \langle f, v_h \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f v_h dx.$$

Nyní budeme integrovat přes jednotlivé elementy počítat pouze přibližně pomocí numerické integrace, tj. ^{kvadratury} bilin. formy $\hat{a}$ a bil. formu $\hat{f}$ budeme uvažovat

$$(23) \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j})(b_{\ell,T}),$$

$$(24) \quad f_h(v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} (f v_h)(b_{\ell,T}).$$

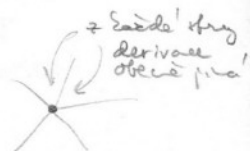
Přitom

$$(a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j})(b_{\ell,T}) \equiv [a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_h|_T) \frac{\partial}{\partial x_j} (v_h|_T)](b_{\ell,T}).$$

(Předp. že první derivace f_i z X_h lze jednoduše rozšířit z $\text{int } T$ na ∂T ; např. $\hat{f} \in C^1(\hat{\Gamma})$.)

Diskrétní problém tedy nyní můžeme: najít funkci $u_h \in V_h$ splňující

$$(25) \quad a_h(u_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$



Diskrétní problém je tedy definován pomocí bodů f_i a a_{ij} a f a současně počtu bodů mřížky $\bar{\Omega}$, což připomíná metody konečných diferencí. Ze skutečnosti však, že většina klasických schémat metody konečných diferencí lze interpretovat jako metody konečných prvků s vhodnými prvky a vhodnou numerickou integrací.

Všimněme si, že formy a_u a f_u nejsou definovány na prostoru V z AVP, neboť bodové hodnoty obecně nejsou definovány pro $f \in H^1(\Omega)$.

Diskrétní problém je jednoduše řešitelný $\Leftrightarrow$ bilineární forma a_u je V_h -eliptická, tj.

$$(26) \quad \exists \tilde{\alpha} > 0: \quad a_u(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_{1,2}^2 \quad \forall v_h \in V_h.$$

(pak také hmotný diskrétní problém je regulární).

Náš cílem je zjistit podmínky podmiňující pro to, aby diskrétní řešení získané pomocí numerické integrace konvergovalo k řešení AVP k stepu τ s konvergenzí jako bez numerické integrace. ~~K tomu bychom potřebovali, aby $\tilde{\alpha}$ v nezávěsti na h . Řekněme pak, že bilineární forma a_u je stepově V_h -eliptická.~~

Věta 11 (První Strangova lemma)

Nechť $u \in V$ je řešením AVP a nechť $u_h \in V_h$ splňuje

$$a_u(u_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h,$$

přičemž V_h je podprostor prostoru V , $a_u: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma, která je V_h -eliptická, tj.

$$\exists \tilde{\alpha} > 0: \quad a_u(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_V^2 \quad \forall v_h \in V_h$$

a f_h je lineární funkce na V_h . Pak

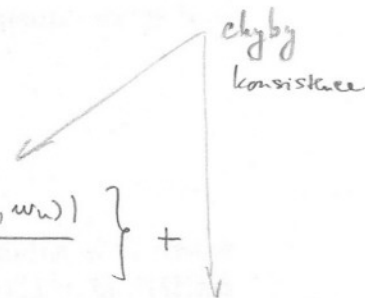
$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \left\{ (M + \tilde{\alpha}) \|u - v_h\|_V + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_u(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\tilde{\alpha}} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|\langle f, w_h \rangle - \langle f_h, w_h \rangle|}{\|w_h\|_V}.$$

Pozn. Je-li $a_u = a$, $f_h = f$, dostáváme Céaova lemma (konstanta je ale horší).

Důkaz: Buď $u_h, w_h \in V_h$. Pak

$$\begin{aligned} a_u(u_h - v_h, w_h) &= \langle f_h, w_h \rangle - a_h(v_h, w_h) = \langle f_h, w_h \rangle - \langle f, w_h \rangle + a(u, w_h) - a_h(v_h, w_h) = \\ &= a(u - v_h, w_h) + a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h) + \langle f_h, w_h \rangle - \langle f, w_h \rangle. \end{aligned}$$



tedy také

$$\tilde{\alpha} \|u_n - v_n\|_V \leq \sup_{w_n \in V_n} \frac{a_n(u_n - v_n, w_n)}{\|w_n\|_V}$$

platí

$$\tilde{\alpha} \|u_n - v_n\|_V \leq M \|u - v\|_V + \sup_{w_n \in V_n} \frac{|a(v_n, w_n) - a_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_V} + \sup_{w_n \in V_n} \frac{|\langle f, w_n \rangle - \langle f_n, w_n \rangle|}{\|w_n\|_V}$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti $\|u - v\|_V \leq \|u - v_n\|_V + \|v_n - v\|_V$ dostáváme třeba'. $\square$

Stupněvost elipticity:

Věta 12 Necht' je daná na referenčním konečném prvku $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ kvadratická vzorec (22) a necht' existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\hat{P} \subset P_m(\hat{T})$$

a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(26) $\bigcup_{e=1}^L \{\hat{b}_e\}$ obsahuje $P_{m-1}(\hat{T})$ - unisolventní množinu

nebo

$$(27) \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \quad \forall \hat{\phi} \in P_{2m-2}(\hat{T}).$$

Pak bilineární formy a_n definované v (24) jsou symetrické V_n -eliptické, tj.

$$(28) \quad \exists \tilde{\alpha} > 0: \quad a_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_{1,1,2}^2 \quad \forall v_n \in V_n \quad \forall n > 0. \quad (\tilde{\alpha} \text{ nezávisí na } \frac{h}{\rho})$$

Důkaz: a) Nejprve ukažeme, že existuje $\hat{c} > 0$ tak, že

$$(*) \quad \hat{c} |\hat{p}|_{1,1,\hat{T}}^2 \leq \sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e |\hat{\sigma} \hat{p}(\hat{b}_e)|^2 \quad \forall \hat{p} \in \hat{P} \quad \left(|\hat{\sigma} \hat{p}|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} \right)^2 \right).$$

Necht' platí (26). Pak pro lib. $\hat{p} \in \hat{P}$ platí implikace

$$\sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e |\hat{\sigma} \hat{p}(\hat{b}_e)|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\hat{\sigma} \hat{p})(\hat{b}_e) = 0, e=1, \dots, L \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma} \hat{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p} \in P_0(\hat{T}).$$

Tedy zobrazení

$$\hat{p} \rightarrow \left[\sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e |\hat{\sigma} \hat{p}(\hat{b}_e)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

je norma na faktorovém prostoru $\hat{P}/P_0(\hat{T})$ a (*) plyne z ekvivalence norm na kon. dim. prostorech ($|\cdot|_{1,1,\hat{T}}$ je skalární norma na $\hat{P}/P_0(\hat{T})$).

Jestliže platí (27), pak $0 = \hat{E}(|\hat{\sigma} \hat{p}|^2) = \int_{\hat{T}} |\hat{\sigma} \hat{p}|^2 dx = \sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e |\hat{\sigma} \hat{p}(\hat{b}_e)|^2$, tj. (*) platí s rovností a $\hat{c} = 1$.

b) Nyní dokážeme (28). Bude $v_n \in V_n$ a $T \in \mathcal{T}_n$. Necht' $F_T(x) = B_T^{-1}x + b_T$ zobrazuje $\hat{T}$ na T a označme $p_T = v_n|_T$ a $\hat{p}_T = p_T \circ F_T$. Pak $\hat{p}_T \in \hat{P}$ a $\frac{\partial \hat{p}_T}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_T}{\partial x_j}(F_T(x)) (B_T^{-1})_{ji}$, takže $|\hat{\sigma} \hat{p}_T(x)| \leq |\sigma p_T(F_T(x))| \cdot \|B_T^{-1}\|$, (kde $\|\cdot\|$ značí Frobeniovu normu ($\|B_T\|^2 = \sum_{i,j=1}^n B_{ij}^2$)).

Analogicky $|\sigma p_T(x)| \leq |\hat{\sigma} \hat{p}_T(F_T^{-1}(x))| \cdot \|B_T^{-1}\|$, a tedy $|\hat{\sigma} \hat{p} \cdot a| = |\sigma p_T \cdot (B_T a)| \leq |\sigma p_T| \cdot \|B_T\| \cdot \|a\|$

$$\begin{aligned} |p_T|_{1,1,T}^2 &= \int_T |\sigma p_T(x)|^2 dx \leq |\det B_T| \int_{\hat{T}} |\hat{\sigma} \hat{p}_T(F_T(x))|^2 dx \leq |\det B_T| \|B_T\|^2 \int_{\hat{T}} |\hat{\sigma} \hat{p}_T(x)|^2 dx = \\ &= |\det B_T| \|B_T^{-1}\|^2 |\hat{p}_T|_{1,1,\hat{T}}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Platí} \quad & \sum_{e=1}^L \omega_{e,T} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \frac{\partial v_e}{\partial x_i} \frac{\partial v_e}{\partial x_j}) (b_{e,T}) = \sum_{e=1}^L \omega_{e,T} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \frac{\partial p_T}{\partial x_i} \frac{\partial p_T}{\partial x_j}) (b_{e,T}) \geq \quad (23) \\
 & \geq \theta \sum_{e=1}^L \omega_{e,T} |\nabla p_T(b_{e,T})|^2 \geq \theta \|B_T\|^{-2} \sum_{e=1}^L \omega_{e,T} |\hat{\nabla} \hat{p}_T(\hat{b}_e)|^2 = \\
 & = \theta |\det B_T| \|B_T\|^{-2} \sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e |\hat{\nabla} \hat{p}_T(\hat{b}_e)|^2 \geq \hat{C} \theta |\det B_T| \|B_T\|^{-2} |\hat{p}_T|_{1,T}^2 \geq \\
 & \geq \hat{C} \theta (\|B_T\| \|B_T^{-1}\|)^{-2} |p_T|_{1,T}^2 \geq \underbrace{\hat{C} \theta \left(\frac{\hat{\rho}^1}{\hat{\rho}^0} \right)^2}_{\tilde{c}} \cdot |u|_{1,T}^2,
 \end{aligned}$$

neboť $\|B_T\| \cdot \|B_T^{-1}\| \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}} \cdot \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_T} \leq \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}} \sigma$. Poslední větu upravíme přes všechna $T \in \mathcal{T}_h$ získáme (28). $\square$

K vyšetření dých rovnice budeme potřebovat následující výsledky.

Věta 13 (Bramble-Hilbertova lemma) Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipsh. spj. hranicí. Necht $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$ a necht $\ell \in [W^{k+1,p}(\Omega)]'$ splňuje $\ell(q) = 0 \quad \forall q \in P_k(\Omega)$.

Pak existuje konstanta C závislá pouze na Ω , k a p taková, že $|\ell(v)| \leq C \|\ell\|_{[W^{k+1,p}(\Omega)]'} |v|_{k+1,p,\Omega} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$.

Důkaz: Pro libovolné $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ platí

$$|\ell(v)| = |\ell(v+q)| \leq \|\ell\|_{[W^{k+1,p}(\Omega)]'} \|v+q\|_{k+1,p,\Omega} \quad \forall q \in P_k(\Omega),$$

Tedy $|\ell(v)| \leq \|\ell\|_{[W^{k+1,p}(\Omega)]'} \inf_{q \in P_k(\Omega)} \|v+q\|_{k+1,p,\Omega} \stackrel{\text{věta 1}}{\leq} C \|\ell\|_{[W^{k+1,p}(\Omega)]'} |v|_{k+1,p,\Omega}. \quad \square$

Věta 14 Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipsh. spj. hranicí, $m \in \mathbb{N}_0$ a $p \in [1, \infty]$. Necht $\varphi \in W^{m,p}(\Omega)$ a $w \in W^{m,\infty}(\Omega)$. Pak $\varphi w \in W^{m,p}(\Omega)$ a platí

$$(29) \quad |\varphi w|_{m,p,\Omega} \leq C \sum_{j=0}^m |\varphi|_{m-j,p,\Omega} |w|_{j,\infty,\Omega},$$

kte C závisí pouze na m a n .

Důkaz: Podle Leibnizova vzorce je pro lib. multiindex α s $|\alpha| = m$

$$\begin{aligned}
 D^\alpha(\varphi w) &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (D^\beta \varphi) (D^\gamma w) = \sum_{j=0}^m \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ |\gamma|=j}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (D^\beta \varphi) (D^\gamma w) \leq \\
 &\leq C(m,n) \sum_{j=0}^m \sum_{|\beta|=m-j} |D^\beta \varphi| |w|_{j,\infty,\Omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \|D^\alpha(\varphi w)\|_{0,p,\Omega} &\leq C(m,n) \sum_{j=0}^m \sum_{|\beta|=m-j} \|D^\beta \varphi\|_{0,p,\Omega} |w|_{j,\infty,\Omega} \leq \\
 &\leq \tilde{C}(m,n) \sum_{j=0}^m |\varphi|_{m-j,p,\Omega} |w|_{j,\infty,\Omega}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Věta 15 Necht' $k \in \mathbb{N}$ je liché, $\tilde{\omega}$

$$(30) \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \quad \forall \hat{\phi} \in P_{2k-2}(\hat{T}).$$

Pak existuje konstanta C nezávislá na $T \in \mathcal{T}_h$ a $\tilde{\omega}$

$$(30) \quad |E_T(a u v)| \leq C h_T^k \|a\|_{k, \infty, T} \|u\|_{k-1, T} \|v\|_{0, T} \quad \forall a \in W^{k, \infty}(T), u, v \in P_{k-1}(T).$$

(Jeli-liž $W^{k, \infty}(T) \subset C(T)$, je uvedená formule dobře definována.)

Důkaz: Před

$$|E_T(a u v)| = (\det B_T) \hat{E}(\hat{a} \hat{u} \hat{v}), \quad \hat{a} \in W^{k, \infty}(\hat{T}), \quad \hat{u}, \hat{v} \in P_{k-1}(\hat{T}).$$

Pro libovolné $\hat{u} \in P_{k-1}(\hat{T})$ a $\hat{\phi} \in W^{k, \infty}(\hat{T})$ je $\hat{\phi}$ závislá na $\hat{T}$ a evolv. formule, užití na $\hat{\phi}, \hat{u}$

$$|\hat{E}(\hat{\phi} \hat{u})| = \left| \int_{\hat{T}} \hat{\phi} \hat{u} d\hat{x} - \sum_{\ell=1}^k \hat{\omega}_\ell (\hat{\phi} \hat{u})(\hat{b}_\ell) \right| \leq \hat{C}_1 \|\hat{\phi}\|_{0, \infty, \hat{T}} \|\hat{u}\|_{0, \infty, \hat{T}} \leq \hat{C}_2 \|\hat{\phi}\|_{k, \infty, \hat{T}} \|\hat{u}\|_{0, \hat{T}}.$$

evolv. normy na $P_{k-1}(\hat{T})$

$$\text{Teď pro dané } \hat{u} \in P_{k-1}(\hat{T}) \text{ je } \hat{E}(\cdot \hat{u}) \in [W^{k, \infty}(\hat{T})]', \quad \|\hat{E}(\cdot \hat{u})\|_{[W^{k, \infty}(\hat{T})]'} \leq \hat{C}_2 \|\hat{u}\|_{0, \hat{T}}$$

$$\text{a } \hat{E}(\hat{\phi} \hat{u}) = 0 \quad \forall \hat{\phi} \in P_{k-1}(\hat{T}). \quad \text{Podle věty 13 je}$$

$$|\hat{E}(\hat{\phi} \hat{u})| \leq \hat{C}_3 \|\hat{\phi}\|_{k, \infty, \hat{T}} \|\hat{u}\|_{0, \hat{T}}, \quad \forall \hat{\phi} \in W^{k, \infty}(\hat{T}), \quad \hat{u} \in P_{k-1}(\hat{T}).$$

Teď

$$|\hat{E}(\hat{a} \hat{u} \hat{v})| \leq \hat{C}_3 \|\hat{a} \hat{u}\|_{k, \infty, \hat{T}} \|\hat{v}\|_{0, \hat{T}} \stackrel{(29)}{\leq} \hat{C}_4 \sum_{j=0}^k |\hat{a}|_{k-j, \infty, \hat{T}} |\hat{u}|_{j, \infty, \hat{T}} \|\hat{v}\|_{0, \hat{T}} \leq \hat{C}_5 \sum_{j=0}^{k-1} |\hat{a}|_{k-j, \infty, \hat{T}} |\hat{u}|_{j, \hat{T}} \|\hat{v}\|_{0, \hat{T}}.$$

Podle věty 2 a věty 3 je

$$|\hat{a}|_{k-j, \infty, \hat{T}} \leq C(k, n) \|B_T\|^{k-j} |a|_{k-j, \infty, T} \leq \hat{C}_6 h_T^{k-j} |a|_{k-j, \infty, T}, \quad j=0, \dots, k-1,$$

$$|\hat{u}|_{j, \hat{T}} \leq C(k, n) \|B_T\|^j |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} |u|_{j, T} \leq \hat{C}_6 h_T^j |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} |u|_{j, T}, \quad j=0, \dots, k-1,$$

$$\|\hat{v}\|_{0, \hat{T}} \leq C(n) |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, T}.$$

Teď

$$|E_T(a u v)| \leq \hat{C}_7 \sum_{j=0}^{k-1} h_T^k |a|_{k-j, \infty, T} |u|_{j, T} \|v\|_{0, T} \leq \hat{C}_8 h_T^k \|a\|_{k, \infty, T} \|u\|_{k-1, T} \|v\|_{0, T}.$$

Pro. záleží idea je v podstatě stejná jako u dříve odhadu díky interpolaci ve větě 4.

Věta 16 Necht' $k \in \mathbb{N}$ je liché, $\tilde{\omega}$

$$\hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \quad \forall \hat{\phi} \in P_{2k-2}(\hat{T})$$

$$\rightarrow W^{k, 2}(\hat{T}) \subset C(\hat{T})$$

a necht' $q \in [1, \infty]$ splňuje $k > \frac{n}{q}$.

Pak existuje konstanta C nezávislá na $T \in \mathcal{T}_h$ a $\tilde{\omega}$

$$(31) \quad |E_T(f p)| \leq C h_T^k [p(T)]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{k, q, T} \|p\|_{1, T} \quad \forall f \in W^{k, 2}(T), p \in P_k(T).$$

Důkaz: Plán'

$$E_T(f\hat{p}) = (\det B_T) \hat{E}(f\hat{p}), \quad \hat{f} \in W^{k,2}(\hat{T}), \quad \hat{p} \in P_2(\hat{T}).$$

Nechť $\hat{\Pi}: L^2(\hat{T}) \xrightarrow{\text{na}} P_1(\hat{T})$ je ortogonální projekce. Pak

$$\hat{E}(f\hat{p}) = \hat{E}(f\hat{\Pi}\hat{p}) + \hat{E}(f(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p})).$$

① Odhad $\hat{E}(f\hat{\Pi}\hat{p})$.

Pro $\hat{\psi} \in W^{k,2}(\hat{T})$ je

$$|\hat{E}(\hat{\psi})| \leq \hat{C}_1 \|\hat{\psi}\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq \hat{C}_2 \|\hat{\psi}\|_{k,2,\hat{T}},$$

neboť $W^{k,2}(\hat{T}) \hookrightarrow C(\hat{T})$. Tedy $\hat{E} \in [W^{k,2}(\hat{T})]'$. Jelikož $\hat{E}(\hat{\psi}) = 0 \quad \forall \hat{\psi} \in P_{2-1}(\hat{T})$ plyne z věty 13

$$|\hat{E}(\hat{\psi})| \leq \hat{C}_3 \|\hat{\psi}\|_{k,2,\hat{T}} \quad \forall \hat{\psi} \in W^{k,2}(\hat{T}).$$

Tedy

$$|\hat{E}(f\hat{\Pi}\hat{p})| \leq \hat{C}_3 \|f\hat{\Pi}\hat{p}\|_{k,2,\hat{T}} \stackrel{(29)}{\leq} \hat{C}_4 [\|\hat{f}\|_{k,2,\hat{T}} \|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}} + \|\hat{f}\|_{k-1,2,\hat{T}} \|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{1,\infty,\hat{T}}].$$

Plán' pro $\hat{p} \in L^2(\hat{T})$

$$\|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \leq \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \quad (\text{je to projekce}),$$

$$\|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{1,\infty,\hat{T}} \leq \|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{1,\infty,\hat{T}} \leq \hat{C} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \leq \hat{C} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}.$$

$$\Rightarrow \|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{1,\infty,\hat{T}} = \sup_{c \in P_2(\hat{T})} |\hat{\Pi}(\hat{p} + c)|_{1,\infty,\hat{T}} \leq \hat{C} \sup_{c \in P_2(\hat{T})} \|\hat{p} + c\|_{0,\hat{T}} \stackrel{(1)}{\leq} \hat{C} \|\hat{p}\|_{1,\hat{T}}$$

$$\|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq \hat{C} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}.$$

Tedy

$$|\hat{E}(f\hat{\Pi}\hat{p})| \leq \hat{C}_5 [\|\hat{f}\|_{k,2,\hat{T}} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} + \|\hat{f}\|_{k-1,2,\hat{T}} \|\hat{p}\|_{1,\hat{T}}].$$

② Odhad $\hat{E}(f(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p}))$.

Jelikož $\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p} = 0$ pro $k=1$, budeme předpokládat, že $k \geq 2$. Pak $\exists \rho \in [1, \infty]$:

$$W^{k,2}(\hat{T}) \hookrightarrow W^{k-1,\rho}(\hat{T}) \hookrightarrow C(\hat{T}).$$

Proč: Je-li $q \in (1, \infty)$, pak lze ρ definovat vztahem $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \in (0,1)$.
 $\left[\begin{array}{l} W^{q,1} \hookrightarrow W^{1,1} \\ \text{pro } 0 \leq j < k, \exists p \in (1, \infty) \text{ a} \\ \frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} \leq \frac{1}{q} < 1 \end{array} \right]$

z věty 10.1 pak ihned plyne, že $W^{k,2}(\hat{T}) \hookrightarrow W^{k-1,\rho}(\hat{T})$, jelikož $k - \frac{n}{q} > 0$

(podle přím. věty), je $\frac{1}{2} < \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{1}{\rho} < \frac{2-1}{n} \Rightarrow W^{k-1,\rho}(\hat{T}) \hookrightarrow C(\hat{T})$.

Je-li $q \in [1, \infty]$, pak $W^{k,2}(\hat{T}) \hookrightarrow W^{k-1,\rho}(\hat{T}) \quad \forall \rho \in [1, \infty)$, jelikož $k \geq 2$, lze zvolit ρ tak, aby $\frac{1}{\rho} < \frac{k-1}{n}$. Pak též $W^{k-1,\rho}(\hat{T}) \hookrightarrow C(\hat{T})$.

Platí tedy

$$|\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}))| \leq \hat{C}_1 \|\hat{f}(\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p})\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq \hat{C}_1 \|\hat{f}\|_{0,\infty,\hat{T}} \|\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq \leq \hat{C}_6 \|\hat{f}\|_{k-1,q,\hat{T}} \|\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}\|_{0,\hat{T}}.$$

Jeliže

$$\hat{E}(\hat{\phi}(\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}))=0 \quad \forall \hat{\phi} \in P_{k-2}(\hat{T}),$$

platí podle věty 13

$$|\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}))| \leq \hat{C}_7 \|\hat{f}\|_{k-1,q,\hat{T}} \|\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}\|_{0,\hat{T}}.$$

Platí

$$\|\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}\|_{0,\hat{T}} = \inf_{c \in P_0(\hat{T})} \|\hat{p}+c-\hat{\Pi}(\hat{p}+c)\|_{0,\hat{T}} \leq 2 \inf_{c \in P_0(\hat{T})} \|\hat{p}+c\|_{0,\hat{T}} \stackrel{11)}{\leq} \hat{C}_8 |\hat{p}|_{1,\hat{T}}.$$

Jeliže $W^{1,2}(\hat{T}) \subset L^q(\hat{T})$ platí $\forall \hat{g} \in W^{1,2}(\hat{T})$

$$\|\hat{g}\|_{0,q,\hat{T}} \leq \hat{C}_9 \|\hat{g}\|_{1,q,\hat{T}} \leq \hat{C}_9 [\|\hat{g}\|_{0,q,\hat{T}} + |\hat{g}|_{1,q,\hat{T}}]. \quad \forall \hat{g} \in W^{1,2}$$

z toho plyne, že

$$\|\hat{f}\|_{k-1,q,\hat{T}} \leq \hat{C}_8 [\|\hat{f}\|_{k-1,q,\hat{T}} + |\hat{f}|_{k,q,\hat{T}}].$$

Dobrá tedy

$$|\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}))| \leq \hat{C}_9 [\|\hat{f}\|_{k-1,q,\hat{T}} + |\hat{f}|_{k,q,\hat{T}}] |\hat{p}|_{1,\hat{T}}.$$

③ z ① a ② plyne (pomocí ekvivalenčního normy)

$$\hat{E}(\hat{f}\hat{p}) \leq \hat{C} [\|\hat{f}\|_{k,q,\hat{T}} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} + |\hat{f}|_{k-1,q,\hat{T}} |\hat{p}|_{1,\hat{T}}].$$

Podle věty 2 a věty 3 je

$$\|\hat{f}\|_{k-j,q,\hat{T}} \leq C(k,m) \|B_T\|^{k-j} |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} |\hat{f}|_{k-j,q,T} \leq \hat{C} h_T^{k-j} |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} \|\hat{f}\|_{k,q,T}, \quad j=0,1,$$

$$|\hat{p}|_{j,\hat{T}} \leq C(m) \|B_T\|^j |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} |p|_{j,T} \leq \hat{C} h_T^j |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} \|p\|_{1,T}, \quad j=0,1,$$

z čehož plyne (31). $\square$

Věta 17 Necht' jsou splněny všechny předpoklady poměti 2 dříve věty 7 a navíc necht' je dále ponejeden referenční bodový produkt $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\mathcal{I}})$ a platí

$$\hat{P} = P_2(\hat{T}).$$

Na $\hat{T}$ necht' je dále dvojitelný vzorec (22) uvedené vlastností splňující

$$\hat{E}(\hat{\phi})=0 \quad \forall \hat{\phi} \in P_{2k-2}(\hat{T}),$$

Vraťme si výše uvedené variacní problém $\sim a_{ij} \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $i,j=1,\dots,n$, a $f \in W^{k,q}(\Omega)$, kde $q \in [2,\infty]$ a $k > \frac{n}{q}$. Necht' slabě řeší toto variacní problém splňuje $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$. Pak existuje konstanta C nezávislá na h taková, že řešení u_h diskretizovaného problému (25) splňuje

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k \left\{ |u|_{k+1,\Omega} + \sum_{i,j=1}^m \|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega} \|u\|_{k+1,\Omega} + \|f\|_{k,q,\Omega} \right\}.$$

Důkaz: Podle věty 11 a věty 12 je

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \left[\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(\Pi_h u, w_h) - a_h(\Pi_h u, w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega}} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|\langle f, w_h \rangle - \langle f_h, w_h \rangle|}{\|w_h\|_{1,\Omega}} \right].$$

Podle předpokladů věty je

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}.$$

Dále

$$|a(\Pi_h u, w_h) - a_h(\Pi_h u, w_h)| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^m |E_T(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Pi_h u|_T) \frac{\partial}{\partial x_j} (w_h|_T))| \leq$$

$$\stackrel{(20)}{\leq} Ch^k \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^m \|a_{ij}\|_{k,\infty,T} \|\Pi_h u\|_{k,T} |w_h|_{1,T} \leq$$

$$\leq Ch^k \left(\sum_{i,j=1}^m \|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega} \right) \|\Pi_h u\|_{k,h} |w_h|_{1,\Omega} \leq$$

$$\leq Ch^k \left(\sum_{i,j=1}^m \|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega} \|u\|_{k+1,\Omega} \right) \|w_h\|_{1,\Omega},$$

neboť (podle věty 6 je)

$$\|\Pi_h u\|_{k,h} \leq \|\Pi_h u - u\|_{k,h} + \|u\|_{k,h} \stackrel{\text{věta 6}}{\leq} Ch |u|_{k+1,\Omega} + \|u\|_{k,\Omega} \leq \tilde{C} \|u\|_{k+1,\Omega},$$

končíme

$$|\langle f, w_h \rangle - \langle f_h, w_h \rangle| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |E_T(f|_T w_h|_T)| \leq Ch^k \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\mu(T)]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \|f\|_{k,q,T} \|w_h\|_{1,T},$$

Jelikož

$$\sum_T |a_T b_T c_T| \leq \left(\sum_T |a_T|^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_T |b_T|^s \right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_T |c_T|^t \right)^{\frac{1}{t}} \quad \forall r,s,t \geq 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1,$$

dobýváme pro $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, $s=q$, $t=2$

$$|\langle f, w_h \rangle - \langle f_h, w_h \rangle| \leq Ch^k [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \|f\|_{k,q,\Omega} \|w_h\|_{1,\Omega} \quad \square$$

Pozn. Je-li $\hat{P} = P_k(\hat{\Gamma})$, pak podmínka $\hat{E}(\hat{\psi}) = 0 \quad \forall \hat{\psi} \in \hat{P}_{2s-2}(\hat{\Gamma})$ implikuje, že všechny integrály $\int_T a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$ jsou počítány přes $\hat{\Gamma}$, protože funkce a_{ij} jsou konstantní.

aplikace
konkrétní číselný vztah 17:

- používá-li lineární n -simplexy, kde $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h)$, pokud použijeme kvadraturu vzorec přibližně pro konstantní funkce, např.

$$\int_T \hat{\phi}(x) dx \approx \mu(T) \hat{\phi}(\hat{a}), \quad \hat{a} \text{ ... střed } T \quad (\hat{a} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \hat{a}_i)$$

- používá-li kvadratické trojúhelníky, kde stále $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h^2)$, pokud použijeme kvadraturu vzorec přibližně pro polynomy druhého stupně, např.

$$\int_T \hat{\phi}(x) dx \approx \frac{1}{3} \mu(T) [\hat{\phi}(\hat{a}_{12}) + \hat{\phi}(\hat{a}_{13}) + \hat{\phi}(\hat{a}_{23})]$$



- používá-li kubické trojúhelníky, je užito pro zachování $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h^3)$ použít kvadraturu vzorec přibližně pro polynomy třetího stupně. např.

Další oblasti MKP

- vektor. Galerkin
- p-verze, hp-verze $\rightarrow$ exp. konvergence
- anizotropní triangulace
- hanging nodes
- mortaring
- adaptivita, a posteriori odhady, adaptivní aproximace hodnoty řešení
- problémy, které nelze zapsat ve tvaru AVP
- stabilizace
- superkonvergence
- postprocessing
- iterativní metody pro řešení algebraických systémů
 - multigrid
- evoluční problémy

Metoda konečných prvků pro parabolické problémy

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná oblast s Lipschitzovskou spojitou hranicí a nechť $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, kde $T > 0$ je pevně zvolený čas.

Uvažujme úlohu pro $u = u(x, t)$

$$(32) \quad u_t + Lu = f \quad \text{v } \Omega_T, \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times [0, T], \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{v } \Omega,$$

kde L je eliptický lu. dif. operátor 2. řádu (vzhledem k x). Pro jednoduchost předpokládáme, že L je selfadjointní na Ω .

Fce u je slabým řešením úlohy (32), jestliže

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

$$(u', v) + a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ a pro s.v. } t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0,$$

kde $a: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma odpovídající operátoru L .

Předp. že a splňuje předpoklady AVP, je známo, že pro $\forall f \in L^2(\Omega_T)$ a

$\forall u_0 \in L^2(\Omega) \exists!$ slabé řešení úlohy (32). Dále budeme předp. že a splňuje

$$(33) \quad |a(v, w) - a(w, v)| \leq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

Při definici a analýze diskrétního řešení je výhodné postupovat ve dvou směrech.

V prvním kroku budeme fci $u = u(x, t)$ aproximovat fci $u_h = u_h(x, t)$ takovou, že

$u_h(\cdot, t) \in V_h \quad \forall t \in [0, T]$. Fce u_h bude řešením soustavy ODR v čase závislé

na h , je to tedy prostorově diskrétní (semidiskrétní) řešení. Ve druhém kroku provedeme diskrétnizaci vzhledem k časové proměnné, čímž získáme plně diskrétní schéma.

Semidiskretizace v prostoru

(tato zvaná method of lines, metoda příček)

Nechť $\{V_h\}$ je systém prostorů konečných prvků na Ω definovaný tak jako dříve a nechť $V_h \subset H_0^1(\Omega) \quad \forall h$.

Každému prostoru V_h přiřadíme diskrétní řešení $u_h: [0, T] \rightarrow V_h$ takové, že

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right) + a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad t \in [0, T],$$

$$u_h(0) = u_{0h},$$

kde $u_{0h} \in V_h$ je aproximace u_0 .

Nechť $\{p_j\}_{j=1}^{N_h}$ je báze ve V_h . Pak $u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) p_j(x)$,

$$u_{0h}(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \beta_j p_j(x) \text{ a platí pro } t \in (0, T]$$

$$\sum_{j=1}^{N_h} (p_j, p_i) \alpha_j'(t) + \sum_{j=1}^{N_h} a(p_j, p_i) \alpha_j(t) = (f, p_i), \quad i=1, \dots, N_h,$$

$$\alpha_j(0) = \beta_j, \quad j=1, \dots, N_h.$$

Označme

$$M = (m_{ij})_{i,j=1}^{N_h}, \quad m_{ij} = (p_j, p_i) \quad \text{mass matrix} \quad (\text{matice hmoty (hmotnosti)})$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N_h}, \quad a_{ij} = a(p_j, p_i) \quad \text{stiffness matrix} \quad (\text{matice tuhosti})$$

$$F = (f_i)_{i=1}^{N_h}, \quad f_i = (f, p_i)$$

$$U = (\alpha_i)_{i=1}^{N_h}, \quad U_0 = (\beta_i)_{i=1}^{N_h}.$$

Pak lze diskrétní problém zapsat ekvivalentně ve tvaru

$$M U'(t) + A U(t) = F(t), \quad t \in (0, T], \quad U(0) = U_0,$$

což je soustava N_h lineárních ODR. Jelikož M je SPD, je regulární, a tedy

$$U'(t) + M^{-1} A U(t) = M^{-1} F(t), \quad t \in (0, T], \quad U(0) = U_0.$$

Tato soustava má právě jedno řešení U takové, že U je splnitelná pro z.v. $t \in [0, T]$. Je-li F spoj. na $[0, T]$, pak U splňuje i to (to budeme dále předpokládat) ($\Rightarrow U$ je spoj. na $[0, T]$).

Věta 18 Necht' jsou splněny všechny předpoklady ~~na prvních dvou~~ kapitole z článku věty 7 a věty 10, speciálně necht' $P_2(\hat{T}_i) \subset \hat{P}_i$, $i=1, \dots, M$.

Nechť $u_0 \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u, u_h \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$. Pak

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} \leq \|u_0 - u_{0h}\|_{0,\Omega} + Ch^{k+1} \left(\|u_0\|_{k+1,\Omega} + \int_0^t \|u(s)\|_{k+1,\Omega} ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Věta 18a $\rightarrow$

Důkaz: Definujme operátor $R_h: H_0^1(\Omega) \xrightarrow{a} V_h$ (projekce) vztahem

$$a(R_h v, v_h) = a(v, v_h) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), v_h \in V_h.$$

Pak $R_h v$ je diskrétní řešení AVP o přímém řešení v a holdí

$$\|v - R_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch^2 \|v\|_{3,\Omega}, \quad \|v - R_h v\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1} \|v\|_{k+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Označme

$$\rho = u - R_h u, \quad \theta = u_h - R_h u \quad (\rho, \theta \text{ závisí na } t!).$$

Pak

$$u - u_h = \rho - \theta.$$

u, u_h spoj.
na $[0, T]$

$\rightarrow R_h u$ spoj.
na $[0, T]$.

$$\rho, \rho', \theta, \theta' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

Platí

$$\| \varphi(t) \|_{0,2} \leq C h^{k+1} |u(t)|_{k+1,2} = C h^{k+1} \left| u_0 + \int_0^t (u_t)(s) ds \right|_{k+1,2} \leq C h^{k+1} \left(|u_0|_{k+1,2} + \int_0^t |u_t(s)|_{k+1,2} ds \right)$$

Dále pro lib. $v_h \in V_h$ a $t \in (0, T]$ je

$$(*) \quad (\theta_t, v_h) + a(\theta, v_h) = \underbrace{(f, v_h)}_{(u_t, v_h) + a(u, v_h)} - \underbrace{\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right)}_{\left(\frac{\partial}{\partial t} R_h u, v_h \right) - a(R_h u, v_h)} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} (u - R_h u), v_h \right) = (p_t, v_h)$$

Pro $v_h = \theta$ získáváme

$$\underbrace{(\theta_t, \theta)}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{0,2}^2} + \underbrace{a(\theta, \theta)}_{\geq 0} = (p_t, \theta)$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ je

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{0,2}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[(\|\theta\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = (\|\theta\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (\|\theta\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$$

(bez zbytkem tam měli $\frac{d}{dt} \|\theta\|_{0,2}$, ale $\|\theta\|_{0,2}$ nemusí být dif. pro $\theta=0$; upř. pro $\theta(t) = t - c$ je $\|\theta(t)\|_{0,2} = \sqrt{1+2} |t-c|$.)

Dostáváme tedy

$$(\|\theta\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (\|\theta\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|p_t\|_{0,2} \|\theta\|_{0,2} \leq \|p_t\|_{0,2} (\|\theta\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{s.v.}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\|\theta\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|p_t\|_{0,2}$$

$$\Rightarrow (\|\theta(t)\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - (\|\theta(0)\|_{0,2}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^t \|p_t(s)\|_{0,2}^2 ds$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Rightarrow \|\theta(t)\|_{0,2} \leq \|\theta(0)\|_{0,2} + \int_0^t \|p_t(s)\|_{0,2}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]$$

Řítem

$$\|\theta(0)\|_{0,2} = \|u_0 - R_h u_0\|_{0,2} \leq \|u_0 - u_0\|_{0,2} + \|u_0 - R_h u_0\|_{0,2} \leq \|u_0 - u_0\|_{0,2} + C h^{k+1} |u_0|_{k+1,2}$$

$$\|p_t\|_{0,2} = \|u_t - R_h u_t\|_{0,2} \leq C h^{k+1} |u_t|_{k+1,2} \quad (\text{Platí } (R_h u)_t = R_h(u_t) \text{ pro s.v. } \leq \text{viz } \S)$$

Věta 18a Za předpokladů věty 18 platí

$$|u(t) - u_h(t)|_{1,2} \leq C \sqrt{\frac{2t}{4\alpha}} \left[|u_0 - u_{0h}|_{1,2} + h^k (|u_0|_{k+1,2} + \left(\int_0^t |u_t(s)|_{k+1,2}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}) \right] + C h^k |u(t)|_{k+1,2} \quad \forall t \in [0, T]$$

Důkaz: Platí $|p(t)|_{1,2} = |u(t) - R_h u(t)|_{1,2} \leq C h^k |u(t)|_{k+1,2}$ a pro $v_h = \theta_t$ plyne z (*):

$$\|\theta_t\|_{0,2}^2 + a(\theta, \theta_t) = (p_t, \theta_t) \leq \frac{1}{2} \|p_t\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2} \|\theta_t\|_{0,2}^2$$

Jeliž podle (33) je

$$\frac{d}{dt} a(\theta, \theta) \stackrel{(\cdot)}{\stackrel{\text{s.v.}}{=}} a(\theta_t, \theta) + a(\theta, \theta_t) \leq 2a(\theta, \theta_t) + 2\|\theta_t\|_{0,2} \|\theta\|_{1,2} \leq 2a(\theta, \theta_t) + \|\theta_t\|_{0,2}^2 + \frac{2}{4\alpha} \|\theta\|_{1,2}^2$$

$$\stackrel{\text{Platí}}{\leq} \|p_t\|_{0,2}^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4\alpha} \|\theta\|_{1,2}^2 \leq \|p_t\|_{0,2}^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4\alpha} a(\theta, \theta)$$

Aplikaci Grmwallera lemmu zrk'vate

$$a(\theta(t), \theta(t)) \leq e^{\frac{\alpha^2 t}{4\alpha}} \left[a(\theta(0), \theta(0)) + \int_0^t \|\rho_t(s)\|_{0,2}^2 ds \right], \quad \forall t \in [0, T],$$

(je-li $\alpha=0$, Grmwallera lemma nepotrebujeme)

z toho plyne

$$\|\theta(t)\|_{1,2}^2 \leq \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\alpha^2 t}{4\alpha}} \left[M \|\theta(0)\|_{1,2}^2 + \int_0^t \|\rho_t(s)\|_{0,2}^2 ds \right].$$

Plan!

$$\|\theta(0)\|_{1,2} = \|u_0h - R_h u_0\|_{1,2} \leq \|u_0h - u_0\|_{1,2} + \|u_0 - R_h u_0\|_{1,2} \leq \|u_0h - u_0\|_{1,2} + Ch^2 \|u_0\|_{2+1,2},$$

$$\|\rho_t\|_{0,2} \stackrel{s.v.}{=} \|u_t - R_h u_t\|_{0,2} \leq Ch^2 \|u_t\|_{2+1,2},$$

tedy

$$\|\theta(t)\|_{1,2}^2 \leq Ce^{\frac{\alpha^2 t}{4\alpha}} \left[\|u_0 - u_0h\|_{1,2}^2 + h^{22} \left(\|u_0\|_{2+1,2}^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|_{2+1,2}^2 ds \right) \right],$$

z toho plyne veta. $\square$

Pozn. Je-li h vln. forma a symetricka, pak $\alpha=0$, a hodit v odhadu ne! pitomna exponenciála závislost na čase.

Pozn. Položme-li $u_0h = \Pi_h u_0$, bude

$$\|u_0 - u_0h\|_{0,2} \leq Ch^{2+1} \|u_0\|_{2+1,2}, \quad \|u_0 - u_0h\|_{1,2} \leq Ch^2 \|u_0\|_{2+1,2},$$

tj. chyba aproximace poč. pod. bude stejného řádu jako ostatní členy v odhadu.

Pozn. Splňují-li číselky triangulace podmínku $h \leq \gamma h_T$, pak lze dokázat (quasiuniform triangulation)

inverzní nerovnosti

$$\|v_h\|_{1,2} \leq Ch^{-1} \|v_h\|_{0,2} \quad \forall v_h \in V_h.$$

$$\|v_h\|_{1,T} \leq C \|v_h\|_{0,T} \leq \tilde{C} \|v_h\|_{0,T} \leq \frac{\tilde{C}}{h_T} \|v_h\|_{0,T} \leq \frac{\tilde{C} \gamma}{h_T} \|v_h\|_{0,T} \leq \frac{\tilde{C} \gamma}{\gamma} \|v_h\|_{0,T} \leq \tilde{C} \|v_h\|_{0,T}$$

Pomocí této nerovnosti lze odhad odhad v $\|\cdot\|_{1,2}$ z odhadu v $\|\cdot\|_{0,2}$: $\forall v_h \in V_h$ je

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_{1,2} &\leq \|u(t) - v_h\|_{1,2} + \|v_h - u_h(t)\|_{1,2} \leq \|u(t) - v_h\|_{1,2} + Ch^{-1} \|v_h - u_h(t)\|_{0,2} \\ &\leq Ch^{-1} \|u(t) - u_h(t)\|_{0,2} + Ch^{-1} \|u(t) - v_h\|_{0,2} + \|u(t) - v_h\|_{1,2}. \end{aligned}$$

Položme-li např. $v_h = \Pi_h u(t)$, pak dostaneme

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{1,2} \leq Ch^{-1} \|u(t) - u_h(t)\|_{0,2} + Ch^2 \|u(t)\|_{2+1,2} \leq$$

$$\begin{aligned} u_0h = \Pi_h u_0 &\leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{2+1,2}^2 + \|u(t)\|_{2+1,2}^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|_{2+1,2}^2 ds \right) \\ &\quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Pozn. Necht' $u_{0h} = R_h u_0$ a a je symetrická, tj. $a = 0$. Pak $\Theta(0) = 0$ a platí

$$\|\Theta(t)\|_{1,2} \leq \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^t \|\rho_t(s)\|_{0,2}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{k+1} \left(\int_0^t \|u_t(s)\|_{k+1,2}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Je tedy $\|u_h - R_h u\|_{1,2} = O(h^{k+1})$, zatímco $\|u_h - u\|_{1,2} = O(h^k)$, tj. vzhledem k $l_{1,2}$ aproximuje u_h lépe $R_h u$ než u . Je to příklad první, který se někdy nazývá superkonvergence.

Discretizace v čase

Semidiscretní problém lze vzhledem k časové proměnné discretizovat různou metodou vyhovující pro ODE. Uvedeme zde nejjednodušší příklad.

Zpětná Eulerova metoda

Necht' $\tau > 0$ je časový krok, $t_k = k\tau$, $k=0,1,\dots$, a aproximujeme řešením $u(\cdot, t_k)$ v čase $t = t_k$ fun' $u_h^k \in V_h$. Časovou derivaci v semidiscretním problému aproximujeme vztahem

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(\cdot, t_k) \approx \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau}$$

Hledáme tedy $u_h^k \in V_h$, $k=1,2,\dots$, splňující

$$\left(\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau}, v_h \right) + a(u_h^k, v_h) = (f(t_k), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad k \geq 1,$$

$$u_h^0 = u_{0h}.$$

Je-li u_h^{k-1} dáno, pak u_h^k je implicitně určeno vč

$$(u_h^k, v_h) + \tau a(u_h^k, v_h) = (u_h^{k-1} + \tau f(t_k), v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

což je lineárně projevová discretizace eliptické vce $(I + \tau L)u = g$.
V maticovém tvaru máme

$$(M + \tau A)U_h^k = MU_h^{k-1} + \tau F(t_k),$$

kde $M + \tau A$ je pos. def. a tedy regulární.

Věta 19 Necht' jsou splněny předpoklady věty 18 a navíc $u_{tt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Pak

$$\|u(t_k) - u_h^k\|_{0,\Omega} \leq \|u_0 - u_{0h}\|_{0,\Omega} + Ch^{k+1} (|u_0|_{2+1,\Omega} + \int_0^{t_k} |u_t(s)|_{2+1,\Omega} ds) + \tau \int_0^{t_k} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega} ds$$

$$|u(t_k) - u_h^k|_{1,\Omega} \leq C \sqrt{\frac{2e^{t_k}}{4\alpha}} \left[\|u_0 - u_{0h}\|_{1,\Omega} + h^k (|u_0|_{3+1,\Omega} + \left(\int_0^{t_k} |u_t(s)|_{3+1,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}) + \tau \left(\int_0^{t_k} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] + Ch^k |u(t_k)|_{1,\Omega}$$

Důkaz: Budeme postupovat podobně jako při důkazu odhadu pro $\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega}$ ve větě 18.

Označme

$$\rho^k = u(t_k) - R_h u(t_k), \quad \theta^k = u_h^k - R_h u(t_k).$$

Pak

$$u(t_k) - u_h^k = \rho^k - \theta^k.$$

Jelikož $\rho^k = \rho(t_k)$, platí

$$\|\rho^k\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1} (|u_0|_{2+1,\Omega} + \int_0^{t_k} |u_t(s)|_{2+1,\Omega} ds).$$

Definujeme operátor D vztahem

$$Du_h^k = \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau}.$$

Pak pro lib. $v_h \in V$ platí

$$\begin{aligned} (+) \quad (D\theta^k, v_h) + a(\theta^k, v_h) &= \underbrace{(f(t_k), v_h)}_{(u'(t_k), v_h) + a(u(t_k), v_h)} = \underbrace{(Du_h^k, v_h)}_{(u_h^k, v_h)} + a(u_h^k, v_h) - \underbrace{(DR_h u(t_k), v_h)}_{(R_h u(t_k), v_h)} - \underbrace{a(R_h u(t_k), v_h)}_{a(u(t_k), v_h)} \\ &= \underbrace{(u'(t_k) - DR_h u(t_k), v_h)}_{\omega^k} = (\omega_1^k, v_h) + (\omega_2^k, v_h), \end{aligned}$$

$$\text{dále} \quad \omega_1^k = u'(t_k) - Du(t_k), \quad \omega_2^k = (I - R_h) Du(t_k).$$

Pro $v_h = \theta^k$ je

$$(D\theta^k, \theta^k) \leq (D\theta^k, \theta^k) + a(\theta^k, \theta^k) \leq \|\omega^k\|_{0,\Omega} \|\theta^k\|_{0,\Omega}$$

$$\Rightarrow \|\theta^k\|_{0,\Omega}^2 - (\theta^{k-1}, \theta^k) \leq \tau \|\omega^k\|_{0,\Omega} \|\theta^k\|_{0,\Omega}$$

$$\Rightarrow \|\theta^k\|_{0,\Omega} \leq \|\theta^{k-1}\|_{0,\Omega} + \tau \|\omega^k\|_{0,\Omega}$$

$$\Rightarrow \|\theta^k\|_{0,\Omega} \leq \|\theta^0\|_{0,\Omega} + \tau \sum_{j=1}^k \|\omega^j\|_{0,\Omega} \leq \|\theta^0\|_{0,\Omega} + \tau \sum_{j=1}^k \|\omega_1^j\|_{0,\Omega} + \tau \sum_{j=1}^k \|\omega_2^j\|_{0,\Omega}.$$

Jelikož $\theta^0 = \theta(0)$, je

$$\|\theta^0\|_{0,\Omega} \leq \|u_0 - u_{0h}\|_{0,\Omega} + Ch^{k+1} |u_0|_{2+1,\Omega}.$$

Dále

$$\tau \omega_1^j = \underbrace{u(t_{j-1}) - u(t_j)}_{t_j - t_{j-1}} + \tau u'(t_j) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u''(s) ds.$$

$$u(t_{j-1}) - u(t_{j-1} + \tau) + \tau u'(t_{j-1} + \tau) = \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1} + \tau} (s - t_{j-1}) u''(s) ds$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau \sum_{j=1}^k \|\omega_1^j\|_{0,\Omega} &= \sum_{j=1}^k \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u''(s) ds \right\|_{0,\Omega} \leq \tau \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u''(s)\|_{0,\Omega} ds \\ &= \tau \int_0^{t_k} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega} ds. \end{aligned}$$

končnice

$$\omega_2^j = (I - R_h) \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t(s) ds = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (I - R_h) u_t(s) ds,$$

a tedy

$$\tau \sum_{j=1}^k \|\omega_2^j\|_{0,2} \leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\|u_t(s) - R_h u_t(s)\|_{0,2}}_{\leq Ch^{k+1} |u_t(s)|_{2+1,2}} ds \leq Ch^{k+1} \int_0^{t_k} |u_t(s)|_{2+1,2} ds.$$

Dodatečně uvaž' odhad v H^1 -sestavě. Pro $v_h = D\theta^k$ dostáváme z (4)

$$\|D\theta^k\|_{0,2}^2 + a(\theta^k, D\theta^k) = (\omega^k, D\theta^k) \leq \frac{1}{2} \|\omega^k\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2} \|D\theta^k\|_{0,2}^2,$$

tedy

$$\|D\theta^k\|_{0,2}^2 + 2a(\theta^k, D\theta^k) \leq \|\omega^k\|_{0,2}^2.$$

Platí

$$\begin{aligned} Da(\theta^k, \theta^k) &= \frac{1}{\tau} [a(\theta^k, \theta^k) - a(\theta^{k-1}, \theta^{k-1})] = \underbrace{a(\theta^k, D\theta^k)} + \underbrace{a(D\theta^k, \theta^{k-1})} = \\ &= \underbrace{2a(\theta^k, D\theta^k)} + \underbrace{a(D\theta^k, \theta^{k-1})} - a(\theta^{k-1}, D\theta^k) + \underbrace{a(\theta^{k-1} - \theta^k, D\theta^k)}_{-2a(D\theta^k, D\theta^k)} \end{aligned}$$

$$\leq 2a(\theta^k, D\theta^k) + 2\epsilon \|D\theta^k\|_{0,2} \|\theta^{k-1}\|_{1,2} \leq$$

$$\leq 2a(\theta^k, D\theta^k) + \|D\theta^k\|_{0,2}^2 + \frac{2\epsilon^2}{4} \|\theta^{k-1}\|_{1,2}^2 \leq$$

$$\leq \|\omega^k\|_{0,2}^2 + \frac{2\epsilon^2}{4\alpha} a(\theta^{k-1}, \theta^{k-1}). \quad (\text{diskrétní analogie spg. případu})$$

Aplicací diskretní verze Gronwallova lemmatu dostáváme

$$a(\theta^k, \theta^k) \leq e^{\frac{2\epsilon^2 t_k}{4\alpha}} \left(a(\theta^0, \theta^0) + \tau \sum_{j=1}^k \|\omega^j\|_{0,2}^2 \right), \quad (\text{je-li } \epsilon=0, \text{ Gronwallova lemma nepotřebujeme})$$

z čeho plyne

$$\begin{aligned} \|\theta^k\|_{1,2}^2 &\leq \frac{1}{\alpha} e^{\frac{2\epsilon^2 t_k}{4\alpha}} \left(M \|\theta^0\|_{1,2}^2 + \tau \sum_{j=1}^k \|\omega^j\|_{0,2}^2 \right) \leq \\ &\leq C e^{\frac{2\epsilon^2 t_k}{4\alpha}} \left(\|u_0 - u_{0h}\|_{1,2}^2 + Ch^{2k} \|u_0\|_{2+1,2}^2 + \tau^2 \int_0^{t_k} \|u_{tt}(s)\|_{0,2}^2 ds + \right. \\ &\quad \left. + h^{2k} \int_0^{t_k} |u_t(s)|_{2,2}^2 ds \right). \quad \square \end{aligned}$$

Pozn. Platí-li inverzní nerovnost, je $\forall u_h \in V_h$: $\|u(t^k) - u_h^k\|_{1,2} \leq \|u(t^k) - v_h\|_{1,2} + \|v_h - u_h^k\|_{1,2} \leq$
 $\leq \|u(t^k) - v_h\|_{1,2} + Ch^{-1} \|v_h - u_h^k\|_{0,2} \leq Ch^{-1} \|u(t^k) - u_h^k\|_{0,2} + Ch^{-1} \|u(t^k) - v_h\|_{0,2} + \|u(t^k) - v_h\|_{1,2}.$

Tedy $\|u(t^k) - u_h^k\|_{1,2} \leq Ch^{-1} \|u(t^k) - u_h^k\|_{0,2} + Ch^2 \|u(t^k)\|_{2+1,2}$ - získáme stejn' odhad, neboť dostaneme $h^{-1}\tau$.

Pozn. Věta 19 ukazuje, že pro $\|u_0 - u_{0h}\|_{0,2} \leq Ch^{k+1}$, $\|u_0 - u_{0h}\|_{1,2} \leq Ch^k$ je

$$\|u(t^k) - u_h^k\|_{0,2} \leq C(h^{k+1} + \tau), \quad \|u(t^k) - u_h^k\|_{1,2} \leq C(h^k + \tau), \quad \text{ kde }$$

Diskrétní verze Gronwallova lemmatu

Nechť $\{a_k\}_{k \geq 0}$, $\{b_k\}_{k \geq 0}$, $\{c_k\}_{k \geq 0}$ jsou posloupnosti reálných čísel a nechť platí

$$(*) \quad a_k - a_{k-1} \leq b_k + c_k a_{k-1}, \quad k=1,2,\dots$$

Pro

$$a_k \leq e^{\sum_{i=1}^k c_i} \left(a_0 + \sum_{j=1}^k b_j \right), \quad k=1,2,\dots$$

Důkaz: Bud' $v_0 = 1$, $v_k = \frac{1}{1+c_k} v_{k-1}$, $k \geq 0$. Pak

$$v_k - v_{k-1} = -c_k v_k, \quad v_{k-1} = (1+c_k) v_k \leq e^{c_k} v_k \Rightarrow v_0 \leq e^{\sum_{i=1}^k c_i} v_k.$$

Platí pro $k \geq 0$

$$a_k v_k - a_{k-1} v_{k-1} = (a_k - a_{k-1}) v_k + a_{k-1} (v_k - v_{k-1}) = (a_k - a_{k-1} - c_k a_{k-1}) v_k \leq b_k v_k \leq b_k.$$

$$\Rightarrow a_k v_k \leq a_0 + \sum_{j=1}^k b_j \Rightarrow a_k \leq e^{\sum_{i=1}^k c_i} \left(a_0 + \sum_{j=1}^k b_j \right). \quad \square$$

Pozn. Pročítáme nerovnost (*) zleva

$$a_k \leq \underbrace{\left(a_0 + \sum_{j=1}^k b_j \right)}_{\alpha_k} + \sum_{j=1}^k c_j a_{j-1}, \quad k=1,2,\dots$$

Položíme $u_k = \alpha_k + \sum_{j=1}^k c_j a_{j-1}$ pro $k \leq k$. Pak

$$u_k = u_{k-1} + c_k a_{k-1} \leq (1+c_k) u_{k-1} \leq e^{c_k} u_{k-1} \Rightarrow u_k \leq e^{\sum_{i=1}^k c_i} \underbrace{u_0}_{\alpha_k} \\ \Rightarrow a_k = u_k \leq \alpha_k e^{\sum_{i=1}^k c_i}. \quad \square$$

C závisí na u_0, u a T . Eulerova metoda je tedy pouze prvního řádu v čase, což je zpravidla nepřijatelnou volbou diskretizace v čase.

Cranz-Nicolsonova metoda

Semidiscretní rovnice pro diskretizovaný symetrický Laplace bodu $t_{k-\frac{1}{2}} = (k-\frac{1}{2})\tau$, čímž získáme metodu druhého řádu přesnosti v čase:

hledáme $u_h^k \in V_h$, $k=1, 2, \dots$, splňující

$$\left(\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau}, v_h \right) + a \left(\frac{u_h^k + u_h^{k-1}}{2}, v_h \right) = (f(t_{k-\frac{1}{2}}), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, k \geq 1,$$

$$u_h^0 = u_{0h}.$$

V lineární formě máme

$$(M + \frac{\tau}{2}A) u_h^k = (M - \frac{\tau}{2}A) u_h^{k-1} + \tau F(t_{k-\frac{1}{2}}),$$

kde $M + \frac{\tau}{2}A$ je pos. def.

Věta 20 Necht' jsou splněny předpoklady věty 18 a u je "dostatečně" regulární. Pak platí

$$\|u(t_k) - u_h^k\|_{0,2} \leq \|u_0 - u_{0h}\|_{0,2} + Ch^{2+1} \left(\|u_0\|_{2+1,2} + \int_0^{t_k} \|u_t(s)\|_{2+1,2} ds \right) + \frac{\tau^2}{4} \int_0^{t_k} \|u_{ttt}(s)\|_{0,2} + \|L u_{tt}(s)\|_{0,2} ds$$

Důkaz: Oznáme θ^k, θ^k jako v důkazu věty 19 a dostaneme

$$(D\theta^k, v_h) + a \left(\frac{\theta^k + \theta^{k-1}}{2}, v_h \right) = (f(t_{k-\frac{1}{2}}), v_h) - (DR_h u(t_k), v_h) - a \left(\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2}, v_h \right) = (\omega^k, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, k \geq 1,$$

kde $\omega^k = \omega_1^k + \omega_2^k + \omega_3^k$, přičemž

$$\omega_2^k = (I - R_h) D u(t_k),$$

$$\omega_1^k = u_t(t_{k-\frac{1}{2}}) - D u(t_k),$$

$$\omega_3^k = L \left(u(t_{k-\frac{1}{2}}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right).$$

Položíme-li $v_h = \theta^k + \theta^{k-1}$, dostaneme

$$(D\theta^k, \theta^k + \theta^{k-1}) \leq \|\omega^k\|_{0,2} (\|\theta^k\|_{0,2} + \|\theta^{k-1}\|_{0,2})$$

$$\frac{1}{\tau} (\|\theta^k\|_{0,2}^2 - \|\theta^{k-1}\|_{0,2}^2) = \frac{1}{\tau} (\|\theta^k\|_{0,2} - \|\theta^{k-1}\|_{0,2}) (\|\theta^k\|_{0,2} + \|\theta^{k-1}\|_{0,2})$$

$$\Rightarrow \|\theta^k\|_{0,2} \leq \|\theta^{k-1}\|_{0,2} + \tau \|\omega^k\|_{0,2}$$

$$\Rightarrow \|\theta^k\|_{0,2} \leq \|\theta^0\|_{0,2} + \tau \sum_{j=1}^k \|\omega^j\|_{0,2} \leq \|\theta^0\|_{0,2} + \tau \sum_{j=1}^k (\|\omega_1^j\|_{0,2} + \|\omega_2^j\|_{0,2} + \|\omega_3^j\|_{0,2}).$$

gledaj θ^0 a ω_2^j jsm stepel jda ve vete 19, zljva' odhadout ω_1^j a ω_3^j . Pral

$$\tau \|\omega_1^j\|_{0,2} = \|\mu(t_j) - \mu(t_{j-1}) - \tau \mu_t(t_{j-1})\|_{0,2}.$$

Podle Taylorova vzorce je

$$\mu(t_j) = \sum_{l=0}^2 \frac{\mu^{(l)}(t_{j-1/2})}{l!} (t_j - t_{j-1/2})^l + \frac{1}{2} \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} (t_j - s)^2 \mu_{ttt}(s) ds,$$

$$\mu(t_{j-1}) = \sum_{l=0}^2 \frac{\mu^{(l)}(t_{j-1/2})}{l!} (t_{j-1} - t_{j-1/2})^l + \frac{1}{2} \int_{t_{j-1/2}}^{t_{j-1}} (t_{j-1} - s)^2 \mu_{ttt}(s) ds,$$

a hdiš

$$\mu(t_j) - \mu(t_{j-1}) = \tau \mu_t(t_{j-1/2}) + \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1/2}} (t_{j-1} - s)^2 \mu_{ttt}(s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} (t_j - s)^2 \mu_{ttt}(s) ds.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \tau \|\omega_1^j\|_{0,2} &= \frac{1}{2} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1/2}} (t_{j-1} - s)^2 \mu_{ttt}(s) ds + \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} (t_j - s)^2 \mu_{ttt}(s) ds \right\|_{0,2} \leq \\ &\leq \frac{\tau^2}{8} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\mu_{ttt}(s)\|_{0,2} ds. \end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned} \tau \|\omega_3^j\|_{0,2} &= \frac{\tau}{2} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1/2}} (s - t_{j-1}) L \mu_{tt}(s) ds + \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} (t_j - s) L \mu_{tt}(s) ds \right\|_{0,2} \leq \\ &\leq \frac{\tau^2}{4} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|L \mu_{tt}(s)\|_{0,2} ds. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \|\theta^2\|_{0,2} &\leq \|\mu_0 - \mu_{0h}\|_{0,2} + Ch^{2+1} |\mu_0|_{2+1,2} + Ch^{2+1} \int_0^{t_2} |\mu_t(s)|_{2+1,2} ds + \\ &+ \frac{\tau^2}{4} \int_0^{t_2} \|\mu_{ttt}(s)\|_{0,2} + \|L \mu_{tt}(s)\|_{0,2} ds. \end{aligned}$$

gledaj $\|\theta^2\|_{0,2}$ te odhadne stepel jda ve vete 19, zljva'ne tvrzen'. $\square$

První dritelba řádu v case kce tje sřkal, aproximace-li časov
derivaci ^(zřetř) diferenční kvocientem dritelba řádu:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, t_2) \approx \frac{1}{\tau} \left(\frac{3}{2} \mu_h^2 - 2 \mu_h^{2-1} + \frac{1}{2} \mu_h^{2-2} \right) \equiv \bar{D} \mu_h^2.$$

Diskrétní problem par μ_h :

$$(\bar{D} \mu_h^2, v_h) + a(\mu_h^2, v_h) = (f(t_2), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \ell \geq 2.$$

Ještě dříve než položíme

$$u_h^0 = u_{0h},$$

ale nyní potřebujeme také u_h^1 , musíme určit ještě jednu hodnotu opět Eulerovou metodou:

$$(Du_h^1, v_h) + a(u_h^1, v_h) = (f(t_1), v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Je však, že platí odhad

$$\begin{aligned} \|u(t_k) - u_h^k\|_{0,r} &\leq \|u_0 - u_{0h}\|_{0,r} + Ch^{k+1} \left(|u_0|_{k+1,r} + \int_0^{t_k} |u_t(s)|_{k+1,r} ds \right) + \\ &+ C\tau \int_0^\tau \|u_{tt}(s)\|_{0,r} ds + C\tau^2 \int_0^{t_k} \|u_{ttt}(s)\|_{0,r} ds \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

Je tedy opět $\|u(t_k) - u_h^k\|_{0,r} = O(h^{k+1} + \tau^2)$ (je-li $u_{tt} \in L^\infty(0, \varepsilon; L^2(L_r))$),

Je ukazovat také proměnný časový krok; např. pro zpětnou Eulerovu metodu platí

$$\begin{aligned} \|u(t_k) - u_h^k\|_{0,r} &\leq \|u_0 - u_{0h}\|_{0,r} + Ch^{k+1} \left(|u_0|_{k+1,r} + \int_0^{t_k} |u_t(s)|_{k+1,r} ds \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^k \tau_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{tt}(s)\|_{0,r} ds. \end{aligned}$$