kam.mff.cuni.cz/~fiala
fiala@kam.mff.cuni.cz

syllabus ... prof. Matuška (na internetu)
skripta ... doc. Tůma (elektronicky na Fialově adrese)

ostatní literatura:
A. Pultr: Matematická analýza I (Matfyzpress' 95) - jsou tam 3 kapitoly o lineární algebře
J. Bečvář: Lineární algebra (Matfyzpress' 02)
J. Bečvář: Sbárka úloh z LA (SPN' 75)
L. Motl, M. Zahradník: Pěstujeme LA (karolinum'95) - trošku jinačí pohled
L. Bican: Lineární algebra a geometrie (Academia' 02) - hodně fomálně psaná

1 051003

Co je lineármí algebra? - Matematická disciplína, která zkoumá objekty, které se chovají lineárně
lineární:

- motivované geometricky
- chování popisuje pomocí několika málo axiomů (18)
- obecně se zabývá tzv. vektrovými prostory, což mohou být množiny číselných vektorů, nebo matice, geometrické objekty (body, přímky, roviny...), funkce, posloupnosti, kombinatorické objekty...

1.1 Kapitoly pro zimní semestr:

Soustavy lineárních rovnic, počítání s maticemi, tělesa, vektorové prostory, lineární závislost, lineární zobrazení, skalární součin

1.2 Soustavy lineárních rovnic

slovní úloha (z přednášky - nemá velký význam(ilustrační))

1.2.1 cíl řešení úloh:

najít řešení
najít počet řešení
... předpokládá se středoškolská znalost $\mathbb{R}$

1.2.2 Definice soustavy lineárních rovnic

Definice 1. ***Soustava rovnic***
Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ je n proměnných $(n \geq 1)$
a nechť $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{mn}, b_1, ..., b_m$ jsou reálná čísla $(m, n \geq 1)$.
Potom soustavou lineárních rovnic o n neznámých $x_1, ..., x_n$ s koeficienty $a_{11}, ..., a_{mn}$ a s pravými stranami $b_1, ..., b_m$ rozumíme:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

(První index vždy znamená řádek)

Notace 2. ***Matice soustavy:***

A...matice soustavy

reálná matice typu $m\times n$ kde $(A)_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$

Vektor protáhlých stran (uspořádaná matice):

$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Vektor neznámých:

$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Poznámka 3. *Všechny vektory jsou sloupcové, potřebujeme-li řádkový zápis (zkrácení zápisu), použijeme transpozici, čili* $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$

Poznámka 4. *Je-li matice A typu $m\times n$ kde $m=n$, je* ***čtvercová****.*

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic:

$Ax=b$

Rozšířená matice soustavy

$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & b_3 \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_4 \end{array}\right)$

Řešení soustavy lineárních rovnic:

Řešením soustavy lineárních rovnic $Ax=b$ je množina všech rálných vektorů $X=(x_1, ..., x_n)^T$, které splňují všech m rovnic soustavy

1.2.3 Příklady geometrické interpretace:

chceme mít alespoň jednu neznámou

$\boldsymbol{m=1, n=1}$

$a_{11}x_1=b_1$

- pokud $a_{11}\neq 0$ (nedegenerovaný případ)
  řešením je $x_1=\frac{b_1}{a_{11}}$ (průsečík přímky (není rovnoběžná s osou x) a osou x)
- pokud $a_{11}\neq 0$
  - pokud je $b\neq 0$
    množina řešení je prázdná (přímka je rovnoběžná s osou x)
  - pokud je $b=0$
    množinou řešení je celé $\mathbb{R}$ (přímka splývá s osou x)

$\boldsymbol{m=1, n=2}$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$

- pokud $a_{11}\wedge a_{12}\neq 0$ (nedegenerovaný případ)
  odpovídá množina řešení přímce
- pokud $a_{11}\vee a_{12}=0$
  řešením je průsečík jedné nebo druhé osy s přímkou
- pokud $a_{11}\wedge a_{12}=0$
  - pokud je $b\neq 0$

množina řešení je prázdná (přímka je rovnoběžná s osou x)

- pokud je b=0
  množinou řešení je celé $\mathbb{R}$ (přímka splývá s osou x)

$m=2$,$n=2$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$

- v nedegenerovaném případě
  řešení odpovídá bodu, prusečíku dvou přímek
- v degenerovaném případě
  může být řešením
  - celá $\mathbb{R}^2$ (nulová matice)
  - přímka (přímky se shodují - jedna rovnice dá přímku a ta druhá ji nijak neomezuje)
  - prázdná množina ($0x_1+0x_2=(b\neq 0)$, přímky jsou rovnoběžné a neprotínají se)

$m=1$,$n=3$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$
v nedegenerovaném případě dostaneme rovinu v $\mathbb{R}^3$

obecně $m=1$,$n=p$

množina bodů v $\mathbb{R}^p$ které se říká nadrovina

1.2.4 Řešení soustavy ekvivalentnímy úpravami

Pro řešení soustavy se používají ekvivalentní úpravy:
1. vynásobení i-tého řádku reálným číslem t
2. přičtení j-tého řádku k i-tému
2*. přičtení t-násobku j-tého řádku k i-tému
3. záměna dvou řádků

1.2.5 DÚ

dokažte, že z 1. a 2. se dají odvodit 2*. a 3.
2*. je vlastně pouze provedení postupně 1. a 2. kroku - není žádnou novou úpravou
3. se také dá poskládat z 1. a 2.

úprava	b	a
a:=a+b	b	a+b
b:=a-b	a	a+b
a:=a-b	a	b

Tvrzení 5. *Ekvivalentní úpravy nemění množinu řešení soustavy lineárních rovnic*

Důkaz. stačí dokázat jen pro 1. a 2. (kvůli DÚ)

1. mám původní soustavu lineárních rovnic (stará, původní), provedu na ní úpravy a vznikne nová soustava -> mám dokázat, že se množina řešení nezmění (ani nepřibude řešení nové)

Nechť $(x_1,...,x_n)^T$ je řešením původní soustavy
ukážu, že $(x_1,...,x_n)^T$ je zároveň řešením soustavy, ve které jsem vynásobil řádek číslem t
řešení určitě splňují všechny řádky nové soustavy, až na ten vynásobený (musím vědět, že lze vytýkat)

$$ta_{i1}x_1+ta_{i2}x_2+\cdots+ta_{in}x_n=t\underbrace{(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)}_{\text{dosadím z původní soustavy}}=\underbrace{tb_i}_{\text{vyšlo mi řešení nové soustavy}}$$

Musíme také ukázat, že každé řešení nové soustavy je řešením původní soustavy
$m-1$ rovností je stejných
(použiji trik - vynásobení 1 a přičtení 0 nic nezmění)
i-tá (vynásobená) rovnost:
$\frac{t}{t}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i1}x_n) = \frac{1}{t}\underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)}_{\text{dosadím z nové soustavy}} = \frac{1}{t}(t\, b_i) = \underbrace{b_i}_{\text{vyšlo mi řešení původní soustavy}}$ □

1.2.6 DÚ

rozmyslete si geometrický význam elementárních úprav

2 051010

Tvrzení 6. *přičtení j-tého řádku k i-tému řádku rozšířené matice nezmění množinu řešení*

Důkaz.

2. stačí ukázat $(x_1, ..., x_n)^T$ splňuje původní i-tou a zároveň j-tou rovnici ⇔ splňuje jejich součet

⇒

$(a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n = (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = b_i + b_j$

⇐

$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i2}x_2 = (a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n - b_j = b_i + b_j - b_j = b_i$
podobně pro b_j □

Definice 7. ***Pivot***
formálně: $j(i) = \min\{k | e_{ik} \neq 0\}$
pivot - první $e_{i,j(i)}$ ... *prní nenulový prvek v daném řádku*

Gausova Eliminace
algoritmus gausovy eliminace pro danou matici A

1. utřídíme řádky matice podle délek úseků počítečních nul vzestupně
2. pokud existují dva nenulové řádky (i-tý a $i+1$-vý) se stejně dlouhým úsekem počátečních nul, potom k $i+1$-mu řádku přičteme $-\frac{a_{i+1,j(i)}}{a_{i,j(i)}}$ násobek i-tého řádku.
3. opakuj 1. a 2. tak dlouho, dokud platí podmínka 2.
   pokud přestane platit, je matice v odstupňovaném tvaru

po provedení 2. (po jedné iteraci) získáme na pozici $i+1$, $j(i)$ nulu ⇒ konečnost (součet délek úseků počátečních nul roste)

složitost algoritmu: $O(n^2 m)$

Zpětná substituce

Notace 8. ***Rozšířená matice soustavy***
E (typu $m \times (n+1)$*) je rozšířená matice soustavy převedená na odstupňovaný tvar*

Korolár 9. *poslední sloupec matice E nesmí obsahovat pivot - jinak by rovnice neměla řešení*

Důkaz. kdyby byl v posledním sloupci pivot $e_{i,n+1} \neq 0$ $(j(i) = n+1)$
i-tý řádek pozm. soustavy by byl: $\underbrace{0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n}_{=0} = \underbrace{e_{i,n+1}}_{\neq 0}$ ale žádné $(x_1, ..., x_n)^T$ tuto rovnici nesplňuje □

Definice 10. *Pro rozšířenou matici soustavy v odstupňovaném tvaru nazveme* ***bázové proměnné*** *ty neznámé, které odpovídají sloupcům s pivoty, ostatní nazveme* ***volné proměnné***

$x_{j(1)}, x_{j(2)}, \ldots, x_{j(r)}$ ... bázové proměnné

Teorém 11. *Nechť E je rozšířená matice soustavy v odstupňovaném tvaru a víme, že poslední sloupec neobsahuje žádný pivot.*

Potom pro libovolné hodnoty volných proměnných existuje právě jedno jednoznačné přiřazení hodnot k bázovým proměnným, tak, že tyto proměnné doromady dávají řešení soustavy.

Důkaz. indukcí - pro $i = r, r-1, ..., 2, 1$

1. $x_{j(i)}$ je i-tá bázová proměnná, předp. že hodnoty všech volných proměnných a také bázových proměnných $x_{j(i+1)}, ..., x_{j(r)}$ jsou již jednoznačně určeny.

2. Potom i-tá rovnice soustavy zní:
$$\underbrace{0x_1 + \cdots + 0x_{j(i)-1}}_{\text{počáteční } 0} + i_{i,j(i)} \underbrace{x_{j(i)}}_{\text{bázová proměnná}} + \underbrace{e_{i,j(i)+1} + \cdots + e_{i,n} = e_{i,n+1}}_{\text{dosazené členy}}$$
jedna rovnice o 1 neznámé $\Rightarrow$ hodnota $x_{j(i)}$ je daná jednoznačně □

Důsledek

Nejenom můžu získat nějaké řešení, ale navíc všechna řešení soustavy lze získat zpětnou substitucí

Dcv

$(x_1, ..., x_n)^T$ je řešení $\Leftrightarrow$ lze ho získat z daných hodnot volných proměnných

Důsledek

Pro rozšířenou matici soustavy $(A|b)$ jsou bázové proměnné v libovolné matici E, kterou lze z $(A|b)$ získat el. úpravami a která je v odsupňovaném tvaru, určeny jednoznačně.

Důkaz.

příprava - v důkazu budu potřebovat, aby soustava měla řešení - pokud ho nemá použijeme místo ní soustavu $(A|b)x' = 0$. Tato soustava má vždy řešení např. $x' = 0$ a navíc matice $(A|b)$ a $(A|b|0)$ dávají stejné pivoty.

dále sporem: nechť existují E,E' takové, že $E \wedge E' \Leftrightarrow (A|b)$ a existuje proměnná, která je bázová E ale je volná v E'

bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že proměnné s vyššímy indexy, než tato x_i mají stejný charakter v obou maticích.

zafixuji hodnoty proměnných x_j: $j > i$ potom hodnota x_i

- je určena jednoznačně v E
- může být libovolná v E'

obě dvě matice by měli popisovat stejné množiny řešení, ale to se neděje $\Rightarrow$ spor □

Definice 12. ***Hodnost matice*** *A je rovna počtu pivotů v libovolné matici E v odstupňovaném tvaru, kterou lze z A získat elem. úpravami. Značí se* $\mathrm{rank}(A)$

3 051017

Teorém 13. ***Frobeniova věta***

Soustava lineárních rovnic má alespoň jedno řešení právě když hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy jsou shodné. (t.j. je-li soustava $Ax = b$ kde $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|b)$*)*

Důkaz. $\Rightarrow \exists$ řešení $\Rightarrow A|b$ přechod na odstupňovaný tvar nemá pivot v posl. sloupci $\Rightarrow$ stejné hodnosti

$\Leftarrow$ stejná hodnost $\wedge$ jednoznačnost pivotů $\Rightarrow$ pivot není v posl. sloupci $(A|b) \Rightarrow \exists$řešení □

Jak spolu souvisí řešení soustavy $Ax = b$ (nehomogenní soustava) a řešení $Ax = 0$ (homogenní soustava)?

Korolár 14.
Jsou-li x^0 a x řešením soustavy $Ax = b$ potom $(x - x^0)$ (rozdíl vektorů po složkách) je řešením $Ax = 0$

Důkaz.
$a_{i1}(x_1 - x_1^0) + a_{i1}(x_2 - x_2^0) + \cdots + a_{in}(x_n - x_n^0) = (a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \cdots + a_{in}\, x_n) - (a_{i1}\, x_1^0 + a_{i2}\, x_2^0 + \cdots + a_{in}\, x_n^0) = b_i - b_i = 0$ □

Korolár 15.
Je-li x^0 řešením $Ax = b$ a $\bar{x}$ řešením $Ax = 0$ potom $\bar{x} + x^0$ řeší soustavu $Ax = b$

Teorém 16. *Nechť x^0 je libovolným řešením nehomogenní soustavy $Ax = b$. Potom zobrazení $\bar{x} \longrightarrow \bar{x} + x^0$ je bijekcí mezi množinamy řešení soustavy $Ax = 0$ a $Ax = b$*

věta platí když soustava má alespoň jedno řešení

Důkaz. důkaz obrázkem:

$g \circ h, h \circ g$ jsou identity $\Rightarrow$ g i h jsou bijekce □

Teorém 17.
Nechť A je matice hodnosti r.

Potom všechna řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ lze vyjádřit ve tvaru $x = p_1\, h^1 + p_2\, h^2 + \cdots + p_{n-r}\, h^{n-r}$, kde $p_1, \ldots, p_{n-r}$ jsou reálná čísla a $h^1, h^2, \ldots, h^{n-r}$ jsou vhodná řešení této soustavy.

Soustava má jenom triviální řešení právě když $\operatorname{rank}(A) = n$.

Důkaz. jiným zápisem zpětné substituce

$$\begin{array}{rcl} \text{bázové proměnné} & & \text{volné proměnné} \\ x_{j(1)} & = & \cdots \\ x_{j(2)} & = & \cdots \\ & \vdots & \\ x_{j(r)} & = & \cdots \end{array}$$

- za volné proměnné zavedu parametry $p_1, \ldots, p_{n-r}$
- přepíšu řešení tak, aby $x_1, \ldots, x_n$ byly volné (vlevo)
- proměnné h vyjdou z volných proměnných

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & h_1^1\, p_1 + h_1^2\, p_2 + \cdots + h_1^{n-r}\, p_{n-r} \\ x_2 & = & h_2^1\, p_1 + h_2^2\, p_2 + \cdots + h_2^{n-r}\, p_{n-r} \\ & \vdots & \\ x_n & = & h_n^1\, p_1 + h_n^2\, p_2 + \cdots + h_n^{n-r}\, p_{n-r} \end{array}$$

vektory $h^i = \begin{pmatrix} h_1^i \\ \vdots \\ h_n^i \end{pmatrix}$ jsou řešením soustavy $Ax = 0$ protože je lze získat dosazením $p_i = 1$; $p_{i'} = 0\ \forall_{i' = i}$ □

Dovětek

Když rank$(A) = n$ $\Leftrightarrow$ v každém sloupci v odstu. tvaru je pivot $\Leftrightarrow$ nejsou volné proměnné $\Leftrightarrow$ $\exists$ právě jedno řešení (a to musí být $x=0$).

Důsledek

Obecné řešení soustavy $Ax=b$ lze vyjádřít ve tvaru $x=x^0+p_1h^1+...+p_{n-r}h^{n-r}$, kde x^0 je libovolné řešení $Ax=b$, $p_1, ..., p_{n-r}$ jsou reální čísla a $h^1, ..., h^{h-r}$ jsou řešení hom. soustavy $Ax=0$ ($r=\text{rank}(A)$)

Poznámka 18. Spolehlivost Gaussovy elimeniace: pozor na kumulaci zaokrouhlovacích chyb - přesnost výpočtu záleží na počtu cifer

násobení & dělení je nepřesné už na malých číslech $(1\colon x)\times x \neq 1$ pro 41,47,55
$1\colon(1\colon x)\neq x$ pro 7,13,14,15 (na kalkulačce)

špatně podmíněné soustavy jsou soustavy, kde malá změna parametru způsobí značnou změnu řešení

shrnutí 1. kapitoly - cílem bylo vyřešit soustavu lineárních rovnic - lze použít maticový zápis, a ten může být nějakým způsobem užitečný

4 počítání s maticemi

Definice 19. *speciální matice:* ***nulová matice*** $m\times n$ $O_{m\times n}$ $(O)_{i,j}=0$ $\forall_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$

Definice 20. ***jednotková matice*** *řádu* n ... *čtvercové matice* $(I_n)_{i,j}\begin{cases}=1\colon i=j\\=0\colon i\neq j\end{cases}$

Definice 21. ***hlavní diagonála*** *čtvercové matice* A *je tvořena prvky* $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$

Definice 22. ***Transponovaná matice*** *k matici* A *typu* $m\times n$ *je matice kterou značíme* A^T *typu* $n\times m$ *a platí* $(A^T)_{ij}=a_{ji}$ $\forall_{i=1,...,n; j=1,...,m}$

Definice 23. *Matice* A *se nazývá symetrická, pokud platí* $A=A^T$

Definice 24. *Pro matice* A, B *stejného typu definujeme* ***součet matic*** $A+B$ *předpisem* $(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Definice 25. *Pro reálné číslo* α *definujeme* ***α-násobek matice*** *předpisem* $(\alpha A)_{ij}=\alpha a_{ij}$

Definice 26. *Je-li* A *matice typu* $m\times n$ *a matici* B *typu* $n\times p$*, potom* ***součinem matic*** A *a* B *rozumíme matici* AB *typu* $m\times p$ *kde* $(AB)_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

A...řádky stejně dlouhé jako sloupce B obr.

cvičení na doma:

ukažte, že součet matic je komutativní ($A+B=B+A$), asociativní,že existuje neutrální prvek,

α-násobek matic... asociativní $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

odvoďte pravidla pro sčítání a α násobky transp. matic

odvoďte distributivní zákony

úkol:

ukažte, že součin matic není komutativní (ani pro čtvercové matice)...$AB=BA$ nemusí platit (soutěž o nejjednodušší protipříklad)

5 051024

Tvrzení 27. *Pro matice A,B a C platí*

1. $(AB)^T = B^T A^T$
2. $(AB)C = A(BC)$
3. $(A+B)C = AC + BC$
4. $A(B+C) = AB + AC$

za předpokladu, že všechny součiny a součty jsou definovány

Důkaz.

1. $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$
   $A ... m \times n; B ... n \times p$
2. $((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} (BC)_{lj} = (A(BC))_{ij}$
3. $((A+B)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC + BC)_{ij}$
4. To samé □

nejzajímavější je 2., protože i když to dá stejný výsledek, tak počet násobení je jiný

5.1 Užití součinu matic

- zápis soustav lin. rovnic $Ax = b$ (x,b vnímány jako matice)
- pro provádění elem. operací (dnes)
- lineární zobrazení lze popsat maticovým součinem (v zs)
- vektorová norma

5.2 Elementární úpravy lze vyjádřit pomocí maticového součinu

Korolár 28. *Nechť matice B vznikne z matice A vynásobením i-tého řádku číslem t. Potom lze psát* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ *neboli* $B = EA$ *kde* $\begin{cases} e_{kj} = 0 \ \forall_{k \neq j} \\ e_{ii} = t \\ e_{kk} = 1 \ \forall_{k \neq i} \end{cases}$

Korolár 29. *Nechť matice B vznikne z A přičtením j-tého řádku k i-tému*
potom

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \qquad \text{neboli } B = EA \text{ kde } \begin{cases} e_{kk} = 1 \ \forall_k \\ e_{ij} = 1 \\ e_{kl} = 0 \, \text{jinak} \end{cases}$$

Důsledek
pokud $B \sim A$ potom $\exists_c B = CA$

Cvičení

1. Ukázat, že AA^T je vždy symetrická
   B je symetrická pokud $B = B^T$

2. Ukažte, že pro A typu $m \times n$ platí $A = I_m A = A I_n$
3. Dokažte pravidlo pro násobení blokových matic
$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

5.3 Inverzní matice

Definice 30. *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pokud existuje matice B taková, že $AB = I_n$, nazývá se B **inverzní matice** k matici A a značí se A^{-1}. Pokud k matici A existuje inverzní matice, je A regulární matice, a pokud neexistuje, A se nazývá singulární*

Teorém 31. ***charakteristika regulárních matic***
Následující podmínky jsou $\Leftrightarrow$

1. *A je regulární (tj. $\exists_B AB = I_n$)*
2. $\text{rank}(A) = n$
3. *A lze elem. úpravami převést na I_n*
4. *Homogenní soustava $Ax = 0$ má pouze triviální řešení*

Důkaz.
4 $\Leftrightarrow$ **2** už bylo dokázáno u soustav
1 $\Rightarrow$ **2** označme $e_1, e_2, ..., e_n$ sloupce matice I_n
sporem: $\text{rank}(A) < n \quad A \approx E$ tj. v i-tém sloupci není pivot
soustava $Ex = e_i$ nemá řešení $\Rightarrow$ soustava $Ax = e_i$ nemá řešení
$AB = I_n$ lze vnímat jako n soustav $Ax = e_i \quad \Rightarrow$ by neexistovalo - spor

2 $\Rightarrow$ **1** A je reg. $\Rightarrow$ $Ax = e_i$ má vždy řešení $\Rightarrow$ z těchto řešení sestavím B

2 $\Leftrightarrow$ **3** A lze převést na odstupňovaný tvar $\rightsquigarrow$ podobně lze elem. úpravy nad diagonálou $\square$

Důsledek
Pokud matice A^{-1} existuje, je určená jednoznačně
A^{-1} sestavuji z jednoznačných řešení soustavy $Ax = e_i$

Důsledek
Pro regulární A platí též $A^{-1}A = I_n$

Důkaz.

1. musíme ukázat, že (A^{-1}) je regulární
sporem: existuje netriviální řešení x soustavy $A^{-1}x = 0$ potom $A(A^{-1}x) = A0 = 0$; $A(A^{-1})x = (AA^{-1})x = I_n x = x$ - spor $\Rightarrow$ A^{-1} je regulární
2. $A^{-1}A = (A^{-1}A)I_n = (A^{-1}A)(A^{-1}(A^{-1})^{-1}) = A^{-1}(AA^{-1})(A^{-1})^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I_n \quad \square$

Cvičení:
Ukažte, že pro A, B regulární, stejného řádu platí
$(A^{-1})^{-1} = A$
AB je regulární
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Jak nalézt inverzní matici a rozhodnout jestli je daná matice regulární?
-sestavíme matici $(A|I_n)$ -> zápis n soustav $Ax = e_i$
-snažíme se elem. úpravami získat matici $(I_n|B)$
-pokud se nám to podaří ... $B = A^{-1}$
pokud ne ... A je singulární.

6 051031

6.1 Tělesa

(Číselné obory, které se dají použít pro počítání s maticemi)

Definice 32. *Binární operací na množině T rozumíme zobrazení $T \times T \rightarrow T$*

Příklad 33.

na $\mathbb{N}$ $(a,b) \rightarrow a+b$ je součet

$(a,b) \rightarrow \min\{a,b\}$

$(a,b) \rightarrow a+18$

$(a,b) \rightarrow a+b-18$ tohle není binární operace na $\mathbb{N}$

na $T=\{0,1\}$

na malé množině se dá zapsat třeba tabulkou:

1.\2.	0	1
0	0	1
1	0	0

T=polynomy na $\mathbb{R}$

$(p(x), q(x)) \rightarrow p(x) + q(x)$

$(x^2+3x, x-4) \rightarrow x^2+4x-4$

Definice 34. *Nechť T je množina a $+, *$ jsou dvě binární operace na T.*
Potom strukturu $(T,+,*)$ nazýváme těleso pokud jsou splněny následující axiomy

1.

I. (SA) $\forall_{a,b,c\in T}(a+b)+c=a+(b+c)$*.... sčítání je asociativní*

II. (SK) $\forall_{a,b\in T} a+b=b+a$ *...... sčítání je komutativní*

III. (SO) $\exists_{0\in T}\forall_{a\in T} a+0=a$ *........ 0 je nulový prvek*

IV. (SI) $\forall_{a\in T}\exists_{-a\in T} a+(-a)=0$ *....... -a je tzv. opačný k a*

2.

I. (NA) $\forall_{a,b,c\in T}(a*b)*c=a*(b*c)$ *.... násobení je asociativní*

II. (NK) $\forall_{a,b\in T} a*b=b*a$ *...... násobení je komutativní*

III. (N1) $\exists_{1\in T}\forall_{a\in T} a*1=a$ *........ 1 je jednotkový prvek*

IV. (NI) $\forall_{a\in T}\exists_{a^{-1}\in T} a*a^{-1}=0$ *.......* a^{-1} *je tzv. inverzní k a*

3.

I. (D) $\forall_{a,b,c\in T} a*(b+c)=a*b+a*c$ *distributivita*

II. (01) $0\neq 1$ *axiom netriviality*

6.1.1 příklady těles:

- $(\mathbb{Q},+,*)$,$(\mathbb{R},+,*)$,$(\mathbb{C},+,*)$
- $(\mathbb{Z}_p,+,*)$...zbytkové třídy modulo prvočíslo p
- $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

- $\mathbb{R}_{(x)}$...racionální lomené funkce $\frac{p(x)}{q(x)}$...podíly polynomů

6.1.2 co těleso není

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$

- $(\mathbb{R}^n, +, *)$...není inverzní prvek (0,a,...)
- $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$ ...nemá inverzní prvek k 2 (index není prvočíslo)

Notace 35. *dodefinujeme bin operace* $-, /$
$a - b = a + (-b)$
$\frac{a}{b} = a * (b^{-1})$ *...není úplná binární operace protože třeba* $b \neq 0$

Korolár 36. *prvky* $0, 1, -a, a^{-1}$ *jsou určeny jenoznačně*

Důkaz. sporem
kdyby 0 a $\overline{0}$ byly 2 různé neutrální prvky, potom $0 \overset{(SO)}{=} 0 + \overline{0} \overset{(SK)}{=} \overline{0} + 0 = \overline{0}$ ... spor
Podobně, kdyby $-a$ a $\overline{-a}$ byly různé opačné k nějakému a
$-a \overset{(SO)}{=} -a + 0 \overset{(SI)}{=} -a + (a + (\overline{-a})) \overset{(SA),(SK)}{=} \overline{-a} + (a + (-a)) \overset{(SI)}{=} \overline{-a} + 0 = \overline{-a}$ ...spor ☐

Korolár 37. $\underbrace{-(-a) = a}_{\forall_{a \in T}}$; $\underbrace{(a^{-1})^{-1} = a}_{\forall_{a \in T} a \neq 0}$

Důkaz. $-(-a) = -(-a) + 0 = -(-a) + (a + (-a)) = a + ((-a) + (-(-a))) = a + 0 = a$ ☐

Korolár 38. $0 * a = 0$ *;* $(-1) * a = -a$

Důkaz. $0 * a = 0 * a + 0 = 0 * a + (0 * a + (-(0 * a))) = (0a + 0a) + (-(0a)) = ((0 + 0)a) + (-(0a)) = 0a + (-(0a)) = 0$ ☐

Korolár 39. $a * b = 0 \ \Rightarrow \ a = 0 \,\text{nebo}\, b = 0$

Důkaz. sporem - $a, b \neq 0$
$1 = 1 * 1 = (a * a^{-1})(b * b^{-1}) = (\text{ab})(a^{-1} b^{-1}) = 0(a^{-1} b^{-1}) = 0$ ☐

DÚ

Pozorování rovnice $a * x = b$ má jednoznačné řešení, pokud $a \neq 0$
Pozorování $\forall_{a,b,c} a + b = a + c \Rightarrow b = c$

Metatvrzení: (tvrzení o tvrzení)

Všechny definice a tvrzení o řešení soustav a počítání s maticemi nad $\mathbb{R}$ platí také pro počítání nad libovolným jiným tělesem.
důkazy využívají jen vlastností reálných čísel popsaných axiomy tělesa

Tvrzení 40. $(\mathbb{Z}_n, +, *)$ *je těleso právě když* n *je prvočíslo*

Důkaz.
=> n je složene $n = a * b$; $a, b \neq 0 \quad ab = 0$ mod n ... spor
<= n je prvočíslo ... $(\mathbb{Z}_n, +, *)$ splňuje všechny axiomy
... všechny axiomy vyjma *(NI)* lze ověřit přímočaře
ověříme existenci inverzního prvku:
definujeme pomocné funkce $f_a: \{0, ..., n-1\} \rightarrow \{0, ..., n-1\} \qquad f_a(x) = a * x \,\text{mod}\, n$
potřebuji ověřit, že $1 \in \underbrace{\text{Rng}(f_a)}_{\text{obor hodnot}}$, stačí ukázat, že f_a je na $\Leftrightarrow f_a$ je prostá
-> kdyby $f_a(b) = f_a(c)$
$0 = f_a(b) - f_a(c) = a * b - a * c = \underbrace{a}_{\neq 0} \underbrace{(b - c)}_{\neq 0} \neq 0$ ... spor ☐

Teorém 41. *Konečné těleso s n prvky existuje $\Leftrightarrow$ n je mocnina prvočísla*
Bez Důkazu

?Značí se GF(n)....Galois field, kde n je mocnina prvočísla? něco s polynomy

7 051107

těleso je zobecnění číselných oborů

Definice 42. *Pokud existuje pro těleso T přirozené číslo n takové, že $\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{-krát}}=0$ potom se nejmenší takové n nazývá* ***charakteristika tělesa*** *T. Pokud neexistuje, má T charakteristiku 0*

Příklad 43.
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$...charakteristika 0
$\mathbb{Z}_p$... charakteristika p
GF(pk)...charakteristika p

Tvrzení 44. *Charakteristika libovlného tělesa je buď 0 nebo prvočíslo.*

Důkaz. (sporem) charakteristika n...složené číslo
$n=a*b$
$0=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{a}+\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{b}$ protože n je nejmenší, tak a i b se nerovná 0 $\Rightarrow$ spor
kvůli axiomu netriviality nemůže být charakteristika 1 □

7.1 Vektorové prostory

snažíme se zobecnit množiny řešení soustav

Definice 45. *Nechť $(T,+,*)$ je těleso. Množina V s binární operací $+$ a zobrazením $T*V\rightarrow V$ se nazývá* ***vektorový prostor*** *nad T pokud platí následující axiomy:*
(SA) $\forall_{u,v,w\in V}(u+v)+w=u+(v+w)$
(SK) $\forall_{u,v\in V}u+v=v+u$
(SO) $\exists_{0\in V}\forall_{v\in V}v+0=v$
(SI) $\forall_{v\in V}\exists_{-v\in V}v+(-v)=0$
(NA) $\forall_{a,b\in T}\forall_{u\in V}(a*b)*u=a*(b*u)$
(N1) $\forall_{u\in V}1*u=u$*, kde 1 je jednotkový prvek tělesa T*
(D1) $\forall_{a,b\in T}\forall_{u\in V}(a+b)*u=a*u+b*u$
(D2) $\forall_{a\in T}\forall_{u,v\in V}a*(u+v)=a*u+a*v$

Ingredience:

$T,+,*$	$V,+,*$
0,1	0
$-a,a^{-1}$	$-v$
$=$	$=$
prvky tělesa - skaláry	prvky vekt. prostoru - vektory

(zároveň taky musí být splněno 10 axiomů tělesa)

Příklad 46. Vektorové prostory

- $V=\{0\}$...triviální vektorový prostor ... nad libovolným tělesem T
- T^n...aritmetický vektorový prostor dimenze n; prvky T^n jsou uspořádané n-tice z T, ...
  $+$ (na V) po složkách $(a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n)=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$

* $(T \times V \to V)$ po složkách $\alpha(a_1, ..., a_n) = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$

z libovolného tělesa lze "vytvořit" vektorový prostor jako aritmetický vektorový prostor dimenze 1 - $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p, \mathrm{GF}(p^k)$, racionální lomené fce,...

- matice pevného typu $m \times n$ nad $T \cong T^{m \times n}$
- polynomy nad T (omezeného stupně)
- spojité (difa) funkce na $\mathbb{R}$ (na intervalu)
- systém podmnožin libovolné množiny X jako vekt. prostor nad GF(2) (prostor char. funkcí)

  $\underbrace{A \subseteq X}_{\text{podmnožina}} \leftrightsquigarrow \underbrace{\varphi_A(x)}_{\text{charakteristická fce}} \quad 1\,\text{pokud} x \in A; 0\,\text{pokud}\, x \notin A$

operace - symetrická diference

Poznámka 47. Je přímka v $\mathbb{R}^d$ vektorový prostor?
-ANO ... pokud obsahuje počátek (nulový vektor).
-NE ... jinak

Korolár 48. *vektroy* 0 *a* $-u$ *jsou určeny jednoznačně - stejný důkaz jako pro tělesa*

Korolár 49. *Pro* $\forall_{u \in V}$ *a* $\forall_{a \in T}$ *platí:* $0 \cdot u = a \cdot 0 = 0$ *(jsou tam dvě různé 0)*

Důkaz. $0 \cdot u = 0u + 0 = 0u + (0u - 0u) = (0u + 0u) - 0u = (0 + 0)u - 0u = 0u - 0u = 0$
$a0 = 0$...pdodobně - dcv □

Korolár 50. *Pokud* $\underbrace{a}_{\in T} \cdot \underbrace{u}_{\in V} = 0$ *tak* $a = 0 \vee u = 0$

Důkaz. Sporem: předpokládejme, že $a \neq 0, u \neq 0$
$0 \neq u = 1u = (aa^{-1})u = a^{-1}(au) = a^{-1}0 = 0 -$ spor □

7.2 Podprostor

Definice 51. *Nechť* $(V, +, *)$ *je vektorový prostor nad tělesem* T *a* $U \subseteq V$*,* $U \neq 0$ *je takové, že*

- $\forall_{u,v \in U} u + v \in U$
- $\forall_{u \in U} \forall_{a \in T} a u \in U$

(U je uzavřená na $+, *$*)*
potom $(U, +, *)$ *nazáváme podprostorem*

Korolár 52. *Podprostor je též vektorovým prostorem*

Důkaz. Jediné problematické axiomy jsou (S0),(SI) ostatní axiomy platí triv. (platí ve V → platí i v U)
(S0) ... $\exists_{\overset{?}{0 \in U}}$ ale $0 = 0u \in U$
(SI) ... $\exists_{\overset{?}{-u \in U}}$ ale $-u = (-1)u \in U$ □

Tvrzení 53. *Nechť* $U_i; i \in I$ *je systém podprosorů nějakého vektorového prostoru V. Potom jejich průnik* $\bigcap_{i \in I} U_i$ *je také podprostorem V.*

Důkaz. Označme $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ stačí ukázat, že $+, *$ jsou uzavřené na U.

+. vezměme $u, v \in U$ potom platí $u, v \in U_i$ pro všechna $i \in I \Rightarrow u + v \in U_i$ pro všechna $i \in I$ $\Rightarrow u + v \in U$

***.** vezměme libovolné $a \in T, u \in U$ potom platí $u \in U_i$ pro $\forall_{i \in I} \Rightarrow \forall_{i \in I} a u \in U$ □

8 051114

$\mathbb{Q}^2$ není podprostor $\mathbb{R}^2$ protože $\mathbb{Q}^2$ je nad $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}^2$ je nad $\mathbb{R}$

Definice 54. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a X je podmnožina V.*

Potom ***prostor generovaný X*** *je průnik všech podprostorů U prostoru V takových, že $X \subseteq U$.*

Značíme jej $\mathcal{L}(X)$ a nazýváme ***lineární obal*** *množiny X.*

$\mathcal{L}(X) = \bigcap\limits_{X \subseteq U \subseteq V} U$

Příklad 55. v $\mathbb{R}^3$

$X = \{\}$

$\mathcal{L}(\{\}) = \mathcal{L}(\{0\}) = \{0\}$

$X = \{a\} \quad a \neq 0$

$\mathcal{L}(\{a\}) =$ přímka procházející $0, a$

Tvrzení 56. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $X \subseteq V$.*

Potom $\mathcal{L}(X)$ obsahuje právě všechny ***lineární kombinace*** *vektorů z X neboli* $\mathcal{L}(X) = \left\{ u \middle| u = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \,; \forall_{i=1,\dots,k} \begin{cases} a_i \in T \\ x_i \in X \end{cases} ; k \in \mathbb{N} \right\}$.

Důkaz. označme $U_1 = \bigcap\limits_{X \subseteq U \subseteq V} U \quad , U_2 = \left\{ u \middle| u = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \,; \forall_{i=1,\dots,k} \begin{cases} a_i \in T \\ x_i \in X \end{cases} ; k \in \mathbb{N} \right\}$

$\boldsymbol{U_1 \subseteq U_2}$**.** Budeme dokazovat, že U_2 je podprostor V a že $X \subseteq U_2$

$X \subseteq U_2$ ... stačí vzít $\sum_{i=1}^{1} a_i x_i$ kde $a_1 = 1$ a libovolné $x_i \in X$

U_2 je podprostor V: budeme zkoumat uzavřenost na

násobky. $y \in U_2$; $y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$; $a \in T$ libovolné

$a.y \overset{?}{\in} U_2$

$$a.y = a\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (a.a_i) x_i \quad \in U_2$$

sčítání. $y, z \in U_2$

$y + z \overset{?}{\in} U_2$

$y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$; $z = \sum_{j=1}^{l} b_j \bar{x_j} \quad \begin{cases} a_i, b_j \in T \\ x_i, \overline{x_j} \in X \end{cases}$

označme $\{w_1, \dots, w_n\} = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{\bar{x_1}, \dots, \bar{x_l}\} \subseteq X$

můžeme zapsat $y = \sum_{i=1}^{n} a_i' w_i \qquad a_i' = a_i$ pokud $w_i = x_i$ jinak $a_i' = 0$ (podobně pro z)

$$y + z = \sum_{i=1}^{n} a_i' w_i + \sum_{i=1}^{n} b_i' w_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i' + b_i') w_i \in U_2$$

$\boldsymbol{U_2 \subseteq U_1}$**.** sporem předpokládejme $\exists_{y \in U_2 \setminus U_1}$ potom $y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$

$y \notin U_i$ ... U_i by nebylo uzavřené na součty & násobky ... takové neexistuje □

8.0.1 Prostory určené maticí

Definice 57. *Nechť A je matice typu $m \times n$ nad tělesem T*

Sloupcový prostor *$\mathcal{S}(A)$ prostor generovaný sloupci A … podprostor T^m*

Řádkový prostor *$\mathcal{R}(A)$ prostor generovaný řádky A … podprostor T^n*

jádro matice KER(A) *prostor tvořený všemi řešeními homogenní soustavy* $Ax=0$ ... *podprostor* T^n *(někdy značen* $\mathcal{N}(A)$*)* *že je prostor dcv (napsat si)*

Korolár 58. $\mathcal{S}(A)=\{u|u=Ax,\, x\in T^n\}$ *zde* X, T *určují koeficienty pro lin. kombinaci sloupců/řádků* A

Korolár 59. $\mathcal{R}(A)=\{w|w^T=y^TA,\, y\in T^m\}$ *zde* X, T *určují koeficienty pro lin. kombinaci sloupců/řádků* A

Korolár 60. *Soustava* $Ax=b$ *má řešení* $\Leftrightarrow$ $b\in\mathcal{S}(A)$ ... *řešení* x *mi dává koeficienty lineární kombinace*

Korolár 61. *Elementární operace nemění* KER$(A), \mathcal{R}(A)$

nikdy $\mathcal{S}(A)$ *např:* $\underbrace{A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{A\sim A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$ $\underbrace{\mathcal{S}(A)=\{u|u=(x,0),\, x\in T\}}_{\mathcal{S}(A')=\{u|u=(x,x), x\in T\}}$

Korolár 62. *Nechť* $v\in\mathcal{R}(A), x\in\mathrm{KER}(A)$ *potom* $v^Tx=0$ $=\sum_{i=1}^{n} v_ix_i$

Důkaz. $w^Tx=(\underbrace{y^T}_{\text{vektor koeficientů určujících } w\in\mathcal{R}(A)} A)x \underbrace{=}_{x \text{ je řešením } Ax=0} y^T0=0$ □

Definice 63. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Potom n-tice vektorů* $v_1, v_2, ..., v_n$ *se nazývá **lineárě nezávislá** pokud rovnice* $a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=0$ *má pouze triviální řešení* $a_1=a_2=...=a_n=0$. *V opačném případě je **lineárně závislá**.*

n tice $\rightsquigarrow$ *množina*

rozšíření definice na nekonečné množiny:

Množina X je lin. nezávislá, pokud každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá.

dcv: příklady na tento termín. negace tvrzení (lineárně závislá)

9 051121

9.1 Lineární nezávislost

Definice 64. *Nechť V je vektorový prostor nad T potom n-tice vektorů* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ *se nazýva* ***Lineárně nezávislá*** *právě když ronvice* $a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=0$ *má pouze triviální řešení.*

Pokud 0 (nulový vektor) je mezi $v_1, ..., v_n \Rightarrow$ LZ nezáleží na pořadí, buno lze předpokládat, že se vektory neopakují ... množiny $\begin{cases}\text{LZ}\\\text{LN}\end{cases}$

∞ množina je LN $\Leftrightarrow$ každá konečná podmnožina je LN

LZ ... jeden vektor lze vyjádřit pomocí ostatních $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$ má netriviální řešení $(a_1, ..., a_n)^T$ kde $a_i\neq 0$ $v_i=-a_i^{-1}(a_1v_1+\cdots+a_{i-1}v_{i-1}+a_{i+1}v_{i+1}+\cdots+a_nv_n)=(-a_1a_i^{-1})v_1+\cdots+(-a_na_i^{-1})v_n$

Příklad 65.

∞ LN : V...prostor reálných polynomů, $X=\{x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, ...\}$ ... LN množina vektorů ve V

$V=\mathbb{R}^3$ $|x|\geq 4$...LZ

$X=\{u\}...\begin{cases}u=0\text{...LZ}\\u\neq 0\text{...LN}\end{cases}$

$X=\{u,v\}...\begin{cases}\text{LZ} & u=0 \text{ nebo } v=0 \text{ nebo přámka } u, v \text{ prochází } 0\\\text{LN} & \text{jinak}\end{cases}$

$X = \{u, v, w\}$...LN pokud u, v, w určují !1 rovinu π: $0 \notin \pi$
$V = T^n$... vektory nenulové řádky matice v odstupňovaném tvaru $\Rightarrow$ LN

Korolár 66. *X je nezávislá $\bigwedge$ $Y \subseteq X$ $\Rightarrow$ Y nezávislá*

Korolár 67. *Y je závislá $\bigwedge$ $Y \subseteq X$ $\Rightarrow$ X závislá*

Korolár 68. *X je nezávislá $\Rightarrow$ $\forall_{u \in X} u \notin \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$*

Jak zjistit, zdali je $X \subseteq T^n$ lineárně nezávislá?
a) sestavíme matici z vektorů X ... tak že řádky A jsou vektory
& převedeme na odstupňovaný tvar $\begin{cases} \exists \text{nulový řádek} \Rightarrow \text{LZ} \\ \nexists \text{nulový řádek} \Rightarrow \text{LN} \end{cases}$

Definice 69. *Nechť V je vektorový prostor. Množina $X \subseteq V$ se nazývají **báze** V pokud*

- *X je lineárně nezávislá*
- *X generuje V neboli $\mathcal{L}(X) = V$*

Proč je pojem báze tak důležitý?
... X generuje V ... každý vektor ve V se dá vyjádřit pomocí vektorů z X
... X je lineárně nezávislá ... toto vyjádření je jednoznačné $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ $v \in V$ $v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$
vektor $(a_1, \ldots, a_n)^T$ je vektor souřadnic vektoru V vůči bázi X a značí se $[v]_x$

Důkaz. důkaz jednoznačnosti:
sporem: $\exists$ vektor se dvěma vyjádřeními vůči stejné bázi
$v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$
$v' = a_1' u_1 + \cdots + a_n' u_n$
$0 = v - v' = \underbrace{(a_1 - a_1')u_1 + \cdots + (a_n - a_n')u_n}_{\text{některý z koeficientů je nenulový} \Rightarrow u_1, \ldots, u_n \text{ LZ} - \text{spor}}$ □

Příklad 70.
T^n ... **kanonická báz**e $k = \{(1, 0, \ldots, 0)^T, (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)^T\}$

V = prostor reálných polynomů, báze = $\{x^0, x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots\}$

Tvrzení 71. *Nechť V je vektorový prostor a $X \subseteq V$ taková, že pro $\forall_{u \in X}$ platí $u \notin \mathcal{L}(X \setminus u)$ a navíc $\mathcal{L}(X) = V$*
Potom X je báze V.

Důsledek: Z každého konečného systému generátorů lze vybrat bázi

Teorém 72. *Každý vektorový prostor má bázi*

Důkaz. pokud $\exists$ konečný systém generátorů ... umíme
jinak je třeba axiom výběru - Bez důkazu □

Lemma 73. ***o výměně***
Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je systém generátorů vektorového prostoru V a pro vektor $u \in V$ platí, $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.
Potom pro libovolné a_i z vyjádření výše takové, že $a_i \neq 0$ platí: $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$ je opět systém generátorů V.

Důkaz.
$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

$v_i = \frac{1}{a_i}(u - a_1v_1 - a_2v_2 - \cdots - a_{i-1}v_{i-1} - a_{i+1}v_{i+1} - \cdots - a_nv_n)$
$v_i = a_i^{-1}u + (-a_na_i^{-1})v_1 + \cdots + (-a_{i-1}a_i^{-1})v_{i-1} + (-a_{i+1}a_i^{-1})v_{i+1} + \cdots + (-a_na_i^{-1})v_n{}^*$
Tzn v_i lze vyjádřit jako lineární kombinaci $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$
Každý jiný vektor $w \in V$ lze vyjádřit pomocí $v_1, \ldots, v_n$ -> substitucí za v_i výrazem *
dostaneme vyjádřením pomocí $v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$ □

10 051128

Teorém 74. ***Steinitzova věta o výměně***
Nechť V je vektorový prosotor, $X \subseteq V$ je lineárně nezávislá, a Y je konečný systém generátorů prostoru V. Potom existuje Z taková, že:

- $\mathcal{L}(Z) = V$ ... *Z je systém generátorů V*
- $|Z| = |Y|$
- $X \subseteq Z$
- $Z \backslash X \subseteq Y$ $\quad\quad Z \subseteq X \cup Y$

Navíc platí také $|X| \leq |Y|$ (Z 2. a 3. bodu)

Důkaz. Vezmeme Y a postupně přidáváme prvky z $X \backslash Y$ a podle lematu o výměně odebíráme prvky $Y \backslash X$.

- lze vždy nalézt vhodný prvek z $Y \backslash X$, protože nově přidávaný prvek vyjadřuji jako lineární kombinaci prvků z $X \cup Y$ $\Rightarrow$ musí existovat nenulový koeficient u nějakého prvku z $Y \backslash X$ jinak by X byla Lineárně Závislá.
- Y konečná $\Rightarrow$ lze provést jen konečně mnoho iterací $\Rightarrow$ $|X| \leq |Y|$. □

Důsledky:

1. Pokud má prostor V konečnou bázi, potom všechny jeho báze mají stejnou mohutnost.

   Důkaz. X, Y báze
   X je LN; $\mathcal{L}(Y) = V$ $\Rightarrow$ $|X| \leq |Y|$
   Y je LN; $\mathcal{L}(X) = V$ $\Rightarrow$ $|Y| \leq |X|$
   $\Rightarrow$ $|X| = |Y|$ □

2. Pokud má V konečnou bázi, potom lze každou LN množinu doplnit na bázi

Definice 75. *Nechť má vektorový prostor V konečnou bázi.*
*Potom říkáme, že V je **konečně generovaný** a mohutnost jeho libovolné báze nazýváme **dimenze prostoru** V, značí se* $\dim(V)$.

Korolár 76. *Je-li $W \subseteq V$ (W podprostor V). Potom* $\dim(W) \leq \dim(V)$

Poznámka 77. Většina vět lze uprvit i pro ∞ množiny.

Tvrzení 78. *Nechť vektory $u_1, \ldots, u_m$ generují prostor $V \subseteq T^n$*
potom $\dim(V) = \operatorname{rank}(A)$, *kde matice A je matice typu $m \times n$ a její řádky tvoří vektory $u_1, \ldots, u_m$*

Důkaz. $V = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_m) = \mathcal{R}(A)$
Víme, že elementární operace nemění $\mathcal{R}(A)$ $\rightsquigarrow$ nalezneme U v odstupňovaném tvaru takovou, že $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(U)$ $\operatorname{rank}(A) =$ počtu pivotů v $U = \dim(V)$
tyto řádky generují $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(A) = V$; navíc jsou LN $\Rightarrow$ tvoří bázi V □

Teorém 79. *Nechť A je matice typu $m \times n$ nad tělesem T. Potom platí* $\dim(\mathcal{S}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \operatorname{rank}(A)$

Důkaz.

I. Ukážeme, že $\underbrace{\text{násobení regulérní maticí}}_{\text{elementární operace}}$ zleva nemění dimenzi sloupcového prostoru.

dána A, regulární R, označíme u_1, ..., u_n sloupce A, položíme $A' = R \cdot A$, u_1', ..., u_n' sloupce A', platí $u_i' = R \cdot u_i$

Nechť $w \in \mathcal{S}(A')$ lze nalézt koeficienty $\underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{\in T}$ takové, že $w = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i' = \sum_{i=1}^{n} a_i R u_i = R \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i}_{\text{vektor z } \mathcal{S}(A) \ldots w} = R \cdot w$

vezmeme bázi $v_1, \ldots, v_d$ prostoru $\mathcal{S}(A)$; $d = \dim(\mathcal{S}(A))$

vyjádřím w jako lineární kombinaci vektorů $v_1, \ldots, v_d$ tzn. $w = \sum_{i=1}^{d} b_i v_i$

$W' = R \cdot w = R \sum_{i=1}^{d} b_i v_i = \sum_{i=1}^{d} b_i \underbrace{Rv}_{\text{označím } v_1', \ldots, v_d'} = \sum_{i=1}^{d} b_i v_i'$

Protože W' byl libovolný vektor, dokážu $\mathcal{S}(A')$ generovat vektory v_1', ..., v_d' $\Rightarrow$ $\dim(\mathcal{S}(A')) \leq d = \dim(\mathcal{S}(A))$.

z faktu $A = R^{-1} A'$ dostanu $\dim(\mathcal{S}(A)) \leq \dim(\mathcal{S}(A'))$ $\Rightarrow$ $\dim(\mathcal{S}(A)) = \dim(\mathcal{S}(A'))$

II. Ukážeme, že pro matice U v odstupňovaném tvaru platí, že $\dim(\mathcal{S}(U)) = \dim(\mathcal{R}(U))$

III. Pro danou A najdeme U v odstupňovaném tvaru, takovou, že $U = RA$ kde R je regulární $\dim(\mathcal{S}(U)) = \dim(\mathcal{S}(A)) = \dim(\mathcal{R}(U) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \operatorname{rank}(A)$

□

Důsledek: $\forall_{A \in T^{m \times n}} \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$

Důsledek: Násobení regulární maticí nemění hodnost.

Důsledek: $\operatorname{rank}(\mathrm{AB}) \leq \min\{\operatorname{rank}(A); \operatorname{rank}(B)\}$

Důkaz. $\mathcal{S}(A) = \{u | u = Ax,\ x \in T^n\} \supseteq \{u | u = Ax,\ x \in \mathcal{S}(B)\} = \mathcal{S}(AB) \rightsquigarrow \dim(\mathcal{S}(AB)) = \operatorname{rank}(AB) \leq \dim(\mathcal{S}(A)), \ldots\ldots$ podobně pro B □

Dcv: Nalezněte případ, že platí $<$

Důsledek: Pro libovolnou matici $A \in T^{m \times n}$ platí, že $\dim(\ker(A)) + \operatorname{rank}(A) = n$

... platí speciálně pro matice v odstupňovaném tvaru $\dim(\ker(A)) = \#$ volných proměnných $=$ n; $\operatorname{rank}(A) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \#$bázových proměnných $= n$

Korolár 80. *Při řešení homogenních soustav $Ax = 0$ tvoří vektory n parametrů bázi prostoru* $\ker(A)$

11 051212

Definice 81. *Nechť V a W jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Potom zobrazení f: $V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení** pokud platí:*

$\forall_{v, v' \in V} f(v + v') = f(v) + f(v')$

$\forall_{v \in V} \forall_{\alpha \in T} f(\alpha v) = \alpha f(v)$

Příklad 82.

triviální lineární zobrazení

$\forall_{v \in V} f(v) = 0$

vnoření vektorových prostorů jako zobrazení

$V \subseteq W$ $f(v) = v$

projekce na i-tou souřadnici v aritmetických vektorových prostorech

$f\colon T^n \to T^1$ $f(v) = f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_i$

Příklad 83. osová souměrnost, stejnolehlost, rotace, .. v rovině
(je ale třeba zachovat počátek)

Příklad 84. prostor diferenciovatelných funkcí
derivace je lineární zobrazení

Příklad 85. lineární zobrazení mezi aritmetickými vektorovými prostory $T^n \to T^m$ určené maticí $A \in T^{m\times n}$
$v \in T^n \quad f(v) = Av$

Korolár 86. *Řešení soustav $Ax = b$ lze vnímat jako hledání množiny vzorů vektoru b při zobrazení $f(v) = Av$ čili $f^{-1}(b)$*

Korolár 87. $\dim(f(v)) \leq \dim(v)$ *kde* $f(v) = \{f(v), v \in V\}$
$u_1, \ldots, u_n$ tvoří bázi V => $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ tvoří systém generátorů $f(v)$ (nemusí být LN)

Korolár 88. *Pokud jsou $f: U \to V$ a $g: V \to W$ lineární zobrazení*
potom je i jejich složení $g \circ f: U \to W$ lineární zobrazení

Dcv
ověřte formálně

Teorém 89. *Nechť V a W jsou vektorové prostory nad stejným tělesem a $u_1, \ldots, u_n$ je báze prostoru V. Potom pro každou n-tici vektorů $z_1, z_2, \ldots, z_n \in W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f: V \to W$ takové, že $f(u_i) = z_i \quad \forall_{i=1,\ldots,n}$*

Důkaz. Libovolné $v \in V$ lze jednoznačně zapsat jako kombinaci vektorů báze $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \quad a_i \in T$
$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i z_i}_{\text{jednoznačné vyjádření } f(v)}$ □

Definice 90. *Nechť V a W jsou vektorové prostory nad tělesem T, $X = (u_1, \ldots, u_n)$ je báze V, $Y = (w_1, \ldots, w_m)$ je báze W a $f: V \to W$ je lineární zobrazení.*
Potom matici $A \in T^{m\times n}$ sestavenou ze sloupců $([f(u_1)]_Y, [f(u_2)]_Y, \ldots, [f(u_n)]_Y)$ nazýváme ***maticí zobrazení*** *f vzhledem k bazím X, Y a značí se $[f]_{XY}$*
Pokud $V = W$ a $f = \mathrm{id}$ potom matice $[f]_{XY}$ se nazývá ***matice přechodu*** *od báze Y k bázi X.*

Užití matice zobrazení:
$v \in V$, báze X znám $[v]_X$
chceme určit $[f(v)]_Y$ .... lze psát $[f(v)]_Y = [f]_{XY} \cdot [v]_X$
$[v]_Y = [\mathrm{id}]_{XY}[v]_X$
proč?
pokud $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \quad a_i = ([v]_x)_i \quad [v]_x = (a_1, \ldots, a_n)^T$
$f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{f(u_i)}_{\text{vyjádření } [f(u_i)]_Y \text{ je i-tý sloupec matice zobrazení}} = \left([f(u_i)]_Y \; \ldots \; [f(u_n)]_Y \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [f]_{XY}[v]_X$

Důsledek:
Nechť V, W, U jsou vektorové prostory nad tělesem T s konečnými bázemi X, Y, Z a $f: V \to W$, $g: W \to U$ jsou lineární zobrazení.
Potom platí $[g \circ f]_{XZ} = [g]_{YZ} \cdot [f]_{XY}$

Důkaz.
$[g \circ f(v)]_Z = [g(f(v))]_Z = [g]_{YZ}[f(v)]_Y = [g]_{YZ}[f]_{XY}[v]_X$
$[(g \circ f)(v)]_Z = [g \circ f]_{XZ}[v]_X$
pokud tedy platí $[g]_{YZ}[f]_{XY}[v]_X = [g \circ f]_{XZ}[v]_X$, tak $[g]_{YZ}[f]_{XY} = [g \circ f]_{XZ}$ □

12 0512115

Příklad 91. stereografická projekce (3D->2D) $\left(\left(a+\frac{\sqrt{2}}{4}c, b+\frac{\sqrt{2}}{4}c\right)\right)$

Definice 92. *Nechť V a W jsou vektorové prosotry nad stejným tělesem T. Potom lineární zobrazení $f: V \to W$ které je prosté a na nazáváme* ***izomorfismem*** *vektorových prosotrů.*

Poznámka 93. zobrazení prosté & na se také nazývá bijekce (1-1 zobrazení)

z definice lze odvodit existenci inverzního zobrazení $f^{-1}: W \to V$

Pozorování:

Pokud je $f: V \to W$ izomorfismus, je izomorfismem i f^{-1}

Důkaz. f^{-1} je bijekce .. z definice musíme ověřit, že f^{-1} je lineární

$f^{-1}(z+z') = f^{-1}(f(x)+f(x')) \underbrace{=}_{f \text{ je lin.}} f^{-1}(f(x+x')) = x+x' = f^{-1}(z)+f^{-1}(z')$

$f^{-1}(\underbrace{\alpha}_{\text{skalár}} \cdot z) = f^{-1}(\alpha \cdot f(x)) = f^{-1}(f(\alpha x)) = \alpha x = \alpha f^{-1}(z)$ □

Tvrzení 94. *Nechť V a W jsou vektorové prostory nad T s konečnými bázemi X, Y. Potom f: $V \to W$ je izomorfismem právě když $\dim(V) = \dim(W)$ a $[f]_{XY}$ je regulární*

Důkaz. (ty dimenze jsou tam zbytečné (jinak by nebyla regulární))

$\Leftarrow$ $[f]_{XY}$ je regulární $\Rightarrow \exists$ inverzní matice $([f]_{XY})^{-1}$ a vezmu si zobrazení g: $W \to V$ takové, že $[g]_{YX} = ([f]_{XY})^{-1}$

$[g \circ f]_{XX} = [g]_{YX} \cdot [f]_{XY} \underbrace{=}_{\text{kdybych se dostal ze dvou na jeden, už bych se nerozdělil}} I_{|X|} = [\mathrm{id}]_{XX} \quad \Rightarrow \quad f$ je pak prosté

$[f \circ g]_{YY} = [f]_{XY}[g]_{YX} \underbrace{=}_{\text{to samé jako minule}} I_{|Y|} = [\mathrm{id}]_{YY} \quad \Rightarrow \quad f$ je na

$(g = f^{-1})$

$\Rightarrow$ f je izomorfismus $\Rightarrow \exists_{f^{-1}}$ .... můžeme vzít matice $[f]_{XY}$, $[f^{-1}]_{YX}$

$[f]_{XY}[f^{-1}]_{YX} = [f \circ f^{-1}]_{YY} = [\mathrm{id}]_{YY} = I_{|Y|}$

$[f^{-1}]_{YX}[f]_{XY} = [f^{-1} \circ f]_{XX} = [\mathrm{id}]_{XX} = I_{|X|}$

z obou těchto faktů plyne: $|X| = |Y|$ - tedy, že jsou čtvercové a regulární □

Teorém 95. *Nechť V je vektorový prostor dimenze n nad tělesem T, potom V je izomorfní k T^n*

Důkaz. Vezmu libovolnou bázi X prosotru V a nadefinuji izomorfismus maticí $[f]_{Xk} = I_n$

(k...kanonická báze T^n) □

Poznámka 96. $\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{S}(R \cdot A))$

$x \in \mathcal{S}(A) \quad f: x \to Rx$

R regulární $\Rightarrow$ f je izomorfismem $\Rightarrow$ zachovává dimenzi

důkaz který jde dokázat jednodušeji, než jsme to dělali minule

Dcv: Prostor polynomu nad T stupně $\leq n$ je izomorfní s T^{n+1}

Matematický kotrmelec:

Máme vektorový prostor V,W nad T. Označme $Z(V, W)$ množinu všech lineárních zobrazení z $V \to W$

Jsou dány f_1, f_2 $V \to W$ ... jak nadefinovat $(f_1+f_2): V \to W$?

Definuji f_1+f_2 následovně: $\forall_{u \in V}(f_1+f_2)(u) = f_1(u)+f_2(u)$

pro $\alpha \in T$ definuje $(\alpha f)\colon V \to W$ následovně: $\forall_u (\alpha f)(u) = \alpha f(u)$

Tvrzení 97. $(Z(V,W), +, \cdot)$ *je vektorový prostor*

Důkaz. Třeba ověřit:

1. že jak $f_1 + f_2$, tak αf jsou lineární zobrazení (4 formulky)
$$(f_1 + f_2)(u + u') = \ldots = (f_1 + f_2)(u) + (f_1 + f_2)(u')$$
2. třeba ověřit axiomy (m.j. nalézt zobrazení, které bude nulovým vektorem, určit opačná zob.,...)
   Dokončení doma □

Poznámka 98. Pokud V a W mají konečné báze X, Y $|X| = n, |Y| = m$
tak $(Z, +, \cdot) \simeq (T^{m \times n}, +, \cdot)$

13 051219

13.1 Prostory se skalárním součinem

-pouze pro prostory nad $\mathbb{C}$ respektive nad $\mathbb{R}$
proč: potřebujeme uspořádání $(\mathbb{R}, \leq)$

- lineární uspořádání - relace - reflexivní, antisymetrická, tranzitivní, úplná
- $a, b \in T$: $\quad a, b > 0 \Rightarrow a + b > 0; a \cdot b > 0$
- $a, b \in T$: $\quad a < b \quad a + (-b) < 0$

& budeme potřebovat odmocňovat

Definice 99. *Nechť V je vektorový prostor nad* $\mathbb{C}$
Potom funkce $V * V \to \mathbb{C}$, *která dvojici vektorů* X, Y *přiřadí komplexní číslo* $\langle X|Y\rangle$ *se nazývá* ***skalární součin***, *pokud splňuje následující axiomy:*

(N). $\langle X|X\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0$

(P). $\forall_{X \in V} \langle X|X\rangle \geq 0$ *(KS)* $\Rightarrow$ $\langle X|X\rangle \in \mathbb{R}$, *proto lze uvažovat* $(\mathbb{R}, \leq)$

(KS). $\forall_{X,Y \in V} \langle X|Y\rangle = \overline{\langle Y|X\rangle}$ *(značí komplexně sdružené číslo)*

(L1). $\forall_{X,Y \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{C}} \langle \alpha X|Y\rangle = \alpha \langle X|Y\rangle$

(L2). $\forall_{X,Y,Z \in V} \langle X + Y|Z\rangle = \langle X|Z\rangle + \langle Y|Z\rangle$

víme, co je $\bar{a}$ ... komplexně sdružené číslo $a + ib \rightsquigarrow a - ib$
$|a|$...absolutní hodnota a

Definice 100. *Nechť V je vektorový prostotr nad* $\mathbb{C}$
Potom funkce $V \to \mathbb{R}$ *která vektoru* x *přiřadí reálné číslo* $\|x\|$ *se nazývá* ***norma***, *pokud splňuje následující axiomy:*

(N). $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

(P). $\forall_{x \in V} \|x\| \geq 0$

(SN). $\forall_{x \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{C}} \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(TN). $\forall_{X,Y \in V} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Příklad 101.

- **Norma odvozená ze skalárního součinu**: $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$

- **standardní skalární součin** na $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$)
  $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y_i}$
- jiný součin definovaný pomocí regulární matice na $\mathbb{R}^n$
  $\langle x|y\rangle = x^T A^T A y$
  např: $\mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dostaneme $\langle x|y\rangle = x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} y = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5y_1y_2$
- prostor integrovatelných fcí na intervalu (a, b)
  $\langle f(x)|g(x)\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{dx}$

Příklad 102. Normy:

- Euklidovská norma:
  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x_i}}$ (na $\mathbb{R}$: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$)
- jiné normy: (například normy odvozené z jiných skalárních součinů)
- dále např: $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$ ...... L_p norma
- Euklidovská norma = L_2 norma
  $p = 1$ $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
  $p = \infty$ $\|x\|_\infty = \max_{i=1,..,\infty} |x_i|$

Geometrická interpretace

$\|x\|$ ... velikost vektoru x
$\|x - y\|$ ... vzdálenost vektorů x a y
$\langle x|y\rangle$ ... odpovídá úhlu sevřeným těmito vektory

Korolár 103. *Pro standardní skalární součin* $\bigwedge$ *Euklidovskou normu v* $\mathbb{R}^n$ *platí:*
$\langle X|Y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos\varphi$
kde φ *je úhel, který svírají x,y.*

Platí kosinová věta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$
$\|x\| = a$
$\|y\| = b$ $\quad c^2 = \langle x - y|x - y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle - 2\|x\|\,\|y\|\cos\varphi$
$\|x - y\| = c$ $\quad \langle x - y|x - y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle - \langle x|y\rangle - \langle y|x\rangle$
$\Rightarrow \langle X|Y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi$

Teorém 104. ***(Cauchy-Schwarzova nerovnost)***

Nechť V je prostor nad $\mathbb{C}$ *se skalárním součinem* $\langle x|y\rangle$ *a* $\|x\|$ *je norma odvozená z tohoto součinu.*

Potom platí: $|\langle x|y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

Důkaz. pokud x nebo y jsou nulové, dostávám $0 = 0$
dále pro libovolné $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $\|x + \alpha y\| \ge 0$
$\|x + \alpha y\|^2 = \langle x + \alpha y|x + \alpha y\rangle = \langle x|x\rangle + \alpha\langle y|x\rangle + \bar{\alpha}\,\langle y|x\rangle + \alpha\bar{\alpha}\,\langle y|y\rangle$
nyní zvolím $\alpha = \frac{-\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle}$ a eliminují se mi poslední dva členy
zůstává:
$0 \le \langle x|x\rangle - \frac{\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle}$
$\Rightarrow \quad \langle x|y\rangle\langle y|x\rangle \le \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$
$|\langle x|y\rangle|^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$
odmocním

$\Rightarrow$
$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ □

Důsledek:
Platnost TN pro normy odvozené ze skalárního součinu

Důkaz. $\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y|x+y\rangle} = \sqrt{\langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle} \leq \sqrt{\|x\|^2 + 2|\langle x|y\rangle| + \|y\|^2} \underbrace{\leq}_{\text{C-S}} \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|$ □

Důsledek:
Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem:

aritmetický pr: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \leq \quad \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$:kvadratický pr.
dostaneme automaticky pro $y \in \mathbb{R}^n$: $y = (1, \ldots, 1)$ $\quad \langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \|y\| = \sqrt{n}$

14 060102

Definice 105. *Vektory x a y z vektorového prosotru se skalárním součinem se nazývají* ***kolmé****, pokud $\langle x|y\rangle = 0$. Značíme $x \perp y$.*

Definice 106. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem a $(v_1, \ldots, v_n)$ je jeho báze taková, že $\forall_{i \neq j}$ platí $v_i \perp v_j$ a navíc $\forall_i$: $\|v_i\| = 1$, potom $(v_1, \ldots, v_n)$ se nazývá* ***orotonormální báze*** *prostoru V.*

Když vektory nějaké ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^n$ narovnám do matice ... dostanu ortogonální matici, u $\mathbb{C}^n$ ... **unitární matice**

Příklad 107. $\mathbb{R}^2$ - kanonická báze; $v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, $v_2 = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) => \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
$A \cdot A^T = I_n$

Korolár 108. *Každý systém vzájemně kolmých vektorů je lineárně nezávislý.*

Důkaz. sporem za DCV □

Tvrzení 109. *Nechť $(v_1, \ldots, v_n)$ je ortonormální báze prostoru V.*
Potom pro libovolný vektor $x \in V$ platí, $x = \langle x|v_1\rangle v_1 + \langle x|v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle x|v_n\rangle v_n$

Koeficienty $\langle x|v_i\rangle$ se nazývají **Fourierovy koeficienty**.

Důkaz. $v_1, \ldots, v_n$ je báze ... lze vyjádřit x jako lin. kombinaci $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i$
$\langle x|v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i \middle| v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle v_i|v_j\rangle}_{\begin{cases} =0 \text{ pro } i \neq j \\ =1 \text{ pro } i=j \end{cases}} = \alpha_j$ □

Definice 110. *Nechť W je prostor se skalárním součinem, $V \subseteq W$ a $Z = (v_1, \ldots, v_n)$ je ortonormálmí báze prostoru V.*
Potom zobrazením P_z: $W \to V$ definované $P_z(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x|v_i\rangle v_i$ se nazývá ***ortogonální projekcí*** *prostoru W do prostoru V.*

Korolár 111. *P_z je lineární zobrazení ... DCV*

Lemma 112. *Nechť $V \subseteq W$, $Z = (v_1, \ldots, v_n)$ je ortonormální báze V a označíme $y = x - P_z(x)$.*
Potom platí, že $y \perp v_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Důkaz. $\langle y|v_i\rangle = \langle x - P_z(x)|v_i\rangle = \left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x|v_j\rangle v_j \middle| v_i \right\rangle = \langle x|v_i\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle x|v_j\rangle v_j \middle| v_i \right\rangle = \langle x|v_i\rangle - \left(\sum_{j=1}^{n} \langle x|v_j\rangle \underbrace{\langle v_j|v_i\rangle}_{\begin{cases} =0 \text{ pro } i\neq j \\ =1 \text{ pokud } i=j \end{cases}} \right) = \langle x|v_i\rangle - (\langle x|v_i\rangle.1) = 0$ □

Důsledky

Nejkratší vzdálenost je na kolmici - $P_z(x)$ je nejbližší vektor v prostoru V k vektoru x (nejblíže = minimalizuje $\|x - P_z(x)\|$.

Důkaz. Chci ukázat, že $\|a\| \leq \|a+b\|$ neboli $\|x - P_z(x)\| \leq \|x - u\|\ \forall_{u\in V}$

$\|a+b\|^2 = \langle a+b|a+b\rangle = \underbrace{\langle a|a\rangle}_{\|a\|^2} + \underbrace{\langle b|b\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle a|b\rangle + \langle b|a\rangle}_{=0 \text{ protože } a\perp b}$ □

Gram-Schmidtova ortonormálizace

-z libovolné báze $(x_1, ..., x_n)$ prostoru se skalárním součinem spočítá bázi $(v_1, ...v_n)$, která je ortonormální

Algoritmus:

pro $i = 1, ..., n$ dělej:

$y_i := x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i|v_j\rangle v_j$

$v_i := \frac{1}{\|y_i\|} y_i$

korektnost pro ukončení i-té iterace $\|v_i\| = 1$, $v_i \perp v_i$ pro $j < i$ protože $y_i \perp v_j$ pro $j < i$ dle lemmatu.

$\mathcal{L}(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = \mathcal{L}(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ plyne z věty o výměně

www.mste.uiuc.edu/exner/ncsa/orthogonal/

Důsledek

Pokud $V \subseteq W$ tak každou ortonormální bázi prostoru V lze rozšířit na ortonormální bázi prostoru W.

14.0.1 Metoda nejmenších čtverců

"Co je to metoda nejmenšíh čtverců?"

...Hledáním přibližných řešení soustavy $Ax = b$

$b \in \mathcal{S}(A)$ ... existuje alespoň 1 přesné řešení.

$b \notin \mathcal{S}(A)$ ... soustava nemá žádné (přesné) řešení.

vezmu $b' = P(b) \in \mathcal{S}(A)$

řešení soustavy $Ax = b' \begin{cases} \text{nutně existuje} \\ \text{minimalizuje } \|Ax - b\| \text{... t.j velikost chyby} \end{cases}$

15 060109

15.0.2 Ortogonální doplněk

Definice 113. *Nechť X je množina vektorů ve vektorovém prostoru W se skalárním součinem. Potom **ortogonální doplněk** množiny X je $X^\perp = \{u \in W | u \perp x \text{ pro } \forall_{x\in X}\}$*

Příklad 114.

- $\mathbb{R}^3, X = \{u\}$ - vznikne kolmá rovina
- $X = \{u, v\}$ - přímka
- $X = \{u, v, w\}$ - počátek $(X^\perp = \{0\})$

Korolár 115. $X \subseteq Y \;\Rightarrow\; X^{\perp} \supseteq Y^{\perp}$

Důkaz. $W \in Y^{\perp} \Leftrightarrow W \perp x; \forall_{x \in Y} \;\Rightarrow W \perp x; \forall_{x \in X} \;\Leftrightarrow w \in X^{\perp}$ □

Příklad 116. hledání řešení homogenních soustav $Ax = 0$:
množina řešení je rovna $\mathcal{R}(A)^{\perp}$
(vůči standartnímu skalárnímu součinu)

Teorém 117. *Nechť V je podprostor prostoru W se skalárním součinem konečné dimenze Potom platí:*

a) $V^{\perp}$ *je podprostor* W

b) $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = \dim(W)$

c) $(V^{\perp})^{\perp} = V$

d) $V \cap V^{\perp} = \{0\}$

Důkaz.

1. Dle důsledků G-S ortonormalizace vezmu X ortonormální bázi V a rozšířím ji na ortonormální bázi Z prostoru W

   Označíme $Y = Z \setminus X$ $\quad \begin{cases} X = \{x_1, \dots, x_k\} \\ Y = \{y_1, \dots, y_l\} \end{cases}$

   Třeba ukázat $\mathcal{L}(Y) = V^{\perp}$

   a) $\mathcal{L}(Y) \subseteq V^{\perp}$ vezmu $w \in \mathcal{L}(Y)$ platí $w = \sum \alpha_i y_i$, ale platí $w \perp x_i$ protože $\langle w | x_i \rangle = \langle \sum \alpha_j y_j | x_i \rangle = \sum \alpha_j \underbrace{\langle y_j | x_i \rangle}_{\text{protože } X \cup Y \text{ je 0 báze}} = \sum \alpha_j 0 = 0$
   $\Rightarrow$ W je kolmý na bázi V $\;\Rightarrow$ W je kolmý na libovolný vektor V

   b) $V^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(Y)$ vezměme libovolný vektor $v \in V^{\perp}$
   $v \in W \;\Rightarrow$ můžu jej vyjádřit vůči bázi $Z = X \cup Y$
   tzn: $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j = \sum \beta_j y_j \Rightarrow v \in \mathcal{L}(Y)$
   $\alpha_i = \langle v | x_i \rangle \qquad \beta_j = \langle v | y_j \rangle$
   protože $v \in V^{\perp} \;\Rightarrow\; \alpha_i = 0$

a) plyne protože $\mathcal{L}$(cokoli) je podprostor

b) $\dim(V) = |x|$
$\dim(V^{\perp}) = |y|$
$\dim(W) = |z| = |x| + |y|$

c) $V = \mathcal{L}(X)$
$V^{\perp} = \mathcal{L}(Y)$
$(V^{\perp}) \perp = \mathcal{L}(X) = V$

d) pro spor předp. že $v \in V \cap V^{\perp}$
$v \neq 0$ potom $\begin{cases} v = \sum \alpha_i x_i \\ v = \sum \beta_j y_j \end{cases} \Rightarrow 0 = v - v = \sum \alpha_i x_i - \underbrace{\sum \beta_j y_j}_{\text{netr. lin. komb}} \;\Rightarrow X \cup Y$ LZ - spor □

Definice 118.
Nechť U je podprostor vektorového prostoru V a $x \in V$. *Potom množina* $\underbrace{x + U}_{\textit{pouze značka}} = \{x + u,$ *pro* $\forall_{u \in U}\}$ *se nazývá* ***afinní prostor***.
Dimenzi $x + U$ *definujeme* $\dim(x + U) = \dim(U)$

Poznámka 119. Afinní prostory nemusí být vektorovým prostorem!

Příklad 120.

- v $\mathbb{R}^3$: roviny, přímky v obecné poloze

Korolár 121. *pokud* $x \in U$ *potom* $x + U = U$

Tvrzení 122. *Nechť* $f: V \rightarrow W$ *je lineární zobrazení a* $b \in f(v)$.

Potom platí: $f^{-1}(0)$ *je podprostor* V *a* $f^{-1}(b)$ *je afinní podprostor* V*, kde* $f^{-1}(b) = x_0 + f^{-1}(0)$ *pro libovolné* $x_0 \in f^{-1}(b)$.

Důkaz.

i. $f^{-1}(0)$ je podprostor - uzavřenost na $+$ a *

$x, y \in f^{-1}(0)$, $\alpha \in T$

$f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X + Y \in f^{-1}(0)$

$f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha x \in f^{-1}(0)$

ii. uvažme $x \in f^{-1}(b)$

$f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = b - b = 0 \qquad x - x_0 \in f^{-1}(0)$; $x = x_0 + w$: $w \in f^{-1}(0)$ □

15.0.3 Lagrangova interpolace

Metoda jak snadno nalézt polynom $p(x)$ stupně $n - 1$

n body (x_i, y_i), kde hledané p má splňovat $y_i = p(x_i)$

Řešíme nehomogenní soustavu s maticí

$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ $\quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1$!neznámé jsou koeficienty polynomu tj. $a_0, \dots, a_{n-1}$

(Vandermontova matice)

alternativní způsob řešení této úlohy:

Označíme si

$$\underbrace{P_i(x)}_{\text{polynom } i \text{ proměnné } x \text{ stupně } n-1} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

$P_i(x_i) = 1$ ... protože $\forall$ dílčí zlomky $= 1$

$j \neq i \quad P_i(x_j) = 0$ ... protože v jednom z činitelů máme $(x_j - x_j)$

Hledaný polynom $p(x)$ získám předpisem

$P(x) = y_1\, p_1(x) + y_2\, p_2(x) + \cdots + y_n\, p_n(x)$

skutečně $P(x_i) = \underbrace{y_1\, p_1(x_i)}_{0} + \underbrace{y_2 p_2(x_i)}_{0} + \cdots + \underbrace{y_i p_i(x_i)}_{1} + \cdots + \underbrace{y_n\, p_n(x_i) = y_i.1 = y_i}_{0}$