

Rovnice matematické fyziky

Autor: Karel Tůma
Zdigitalisoval: Iosephus Kučeravý

Obsah

Transportní rovnice, PDR 1. řádu	1
Theorie k nalezení řešení rovnice (5)	3
Př.: Homogenní transportní rce s konstantními koeficienty	5
3 způsoby řešení	5
Příklady na procvičení	8
Malá exkurse do světa nelineárních PDR	11
Burgersova rovnice	12
Nehomogenní transportní rovnice s konstantními koeficienty	20
Odvození d'Alembertova vzorečku	21
Fundamentální řešení ODR	23
Rovnice vedení tepla	25
Princip superpozice	25
Vlnová rovnice	35
d'Alembertův vzorec	38
Okrajové úlohy	39
Úlohy pro Laplaceovu a Poissonovu rovnici	52
Obecná Dirichletova úloha na ■	57
Dodatky	60
Poissonova sumační formule	60
Příklady na RVT	62

Transportní rovnice, PDR 1. řádu

Buď $\vec{v} = \vec{v}(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ dané vektorové pole.

T ... časový interval našeho zájmu

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$... otevřená množina, kde je pole $\vec{v}$ dobře definováno.

Částice (barvivo) umístěné v $t = 0$ do bodu $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_d^0) \in \Omega$ se pohybuje v poli $\vec{v}$ po trajektorii

$$\vec{\chi}((\bullet, \vec{x}^0)) : [0, T] \rightarrow \Omega \text{ tak, že } t \in [0, T] \text{ přiřadí } \vec{x} \in \Omega, \text{ kde} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t} = \vec{v} \text{ neboli } \frac{\partial \vec{\chi}(t, \vec{x}^0)}{\partial t} = \vec{v}(t, \underbrace{\vec{\chi}(t, \vec{x}^0)}_{\vec{x}}) \quad (2)$$

Částice může transportovat nějakou veličinu (hustotu, koncentraci). Označme ji u . Pak pokud zanedbáme další možné fyzikální mechanismy (zdroje u , difuze u , ...), tak se hodnota u podél trajektorie nemění, tj

$$0 = \frac{d}{dt} u(t, \vec{\chi}(t, \vec{x}^0)) \quad (3)$$

S využitím řetízkového pravidla na (3) dostáváme rovnici transportu

$$\begin{aligned} \boxed{0} &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, \vec{\chi}(t, \vec{x}^0)) + \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, \vec{\chi}(t, \vec{x}^0)) \frac{\partial \chi_k}{\partial t}(t, \vec{x}^0) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(\dots) + \frac{\partial u}{\partial x_k}(\dots) v_k(\dots) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \vec{x}) + \nabla(t, \vec{x}) \cdot \vec{v}(t, \vec{x}) = \boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u \right)(t, x)} \end{aligned} \quad (4)$$

Zobrazení $u \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_k} + \vec{v} \cdot \nabla u$ nazýváme transportní operátor.

Shrnutí:

- Trajektorie částice v daném vektorovém poli $\vec{v}$ jest popsána systémem ODR (2). Veličina u , která jest transportována po dané trajektorii, řeší transportní rovnici (4).
- Transportní rovnice (4) jest speciální případ PDR 1.řádu.
- Viděli jsme, že tento speciální případ PDR 1. řádu, tj. rovnice (4) úzce souvisí se systémem ODR (2). V našem případě jsme z (2) odvodili (4).
- Ukážeme, že PDR¹ 1.řádu lze řešit pomocí ODR typu (2).

¹PDR = parciální diferenciální rovnice

Cíl:

Zformulovat teorii pro řešení PDR 1.řádu a naučit se tyto rovnice, alespoň v jednoduchých případech, řešit.

Definice 1 (Parciální diferenciální rovnice 1. řádu).

Pro

$$F : \underbrace{(\Omega \subset \mathbb{R}^N)}_{(y_1, \dots, y_N)} \times \underbrace{\mathbb{R}^{N+1}}_{(u, z_1, \dots, z_N)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

řešíme úlohu

$$F\left(y_1, \dots, y_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = 0, \quad \text{zkráceně } F(\vec{y}, u, \nabla u) = 0$$

Příklad:

Rovnice transportu $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = 0$ nezávisí explicitně na u .

$$F \text{ má tvar } F(\underbrace{t, x_1, \dots, x_d}_{N=d+1}, z_0, z_1, \dots, z_d) = z_0 + \sum_{k=1}^d v_k(t, x) z_k$$

$y_1, \dots, y_N$

Úkol:

Vymyslete pěkný nelineární příklad PDR 1. řádu, určete funkci F .

Definice 2 (Kvazilineární PDR 1. řádu).

Obecný případ:

$$\sum_{k=1}^n a_k(\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{\vec{y}}, u) \frac{\partial u(y)}{\partial y_k} = f(y, u)$$

Nehomogenní lin. PDR 1.řádu:

$$\sum_{k=1}^n a_k(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial y_k}(\vec{y}) + a_{n+1}(y)u(y) = f(y)$$

Homogenní lin. PDR 1.řádu:

$$\sum_{k=1}^n a_k(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial y_k}(\vec{y}) = 0 \quad (5)$$

Theorie k nalezení řešení rovnice (5)

$$a_1(y) \frac{\partial u}{\partial y_1}(\vec{y}) + \dots + a_n(y) \frac{\partial u}{\partial y_n}(\vec{y}) = 0; \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \quad (5)$$

$$\text{kde } a_n(\vec{y}) \text{ splňuje: } \sum_{k=1}^n |a_k(\vec{y})| > 0 \quad \forall \vec{y} \in \Omega$$

- Necht u řeší (5). Uvažujme parametrizaci (trajektorie, křivka):

$$s \in \mathbb{R} \mapsto (y_1(s), \dots, y_N(s)) \quad (\star)$$

a definujeme

$$z(s) := U(y_1(s), \dots, y_N(s)) = u(\vec{y}(s))$$

$$\text{Pak: } \frac{dz}{ds}(s) =: z'(s) = \frac{\partial u}{\partial y_1} y'_1(s) + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_N} y'_N(s) \quad (6)$$

- Srovnáním (5) a (6) dostáváme:

Tvrzení 1.

Pokud $y_1(s), \dots, y_N(s)$ řeší systém ODR

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_1(y_1(s), \dots, y_N(s)) \\ &\vdots \\ y'_N &= a_N(y_1(s), \dots, y_N(s)) \end{aligned} \quad (7)$$

pak $z'(s) = 0$ a tedy $u(y_1(s), \dots, y_N(s))$ se na křivce $(\star)$ nemění, neboli u jest podél křivky $(\star)$ konstantní (k určení je třeba znát hodnotu v jednom bodě křivky)

Také platí následující tvrzení:

Tvrzení 2.

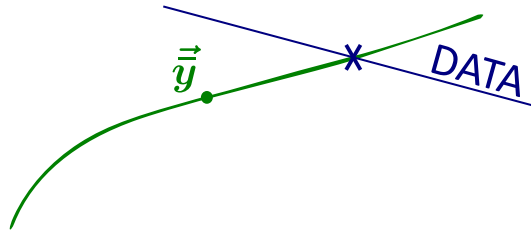
Jest-li $\vec{y}$ řešením systému ODR (7), pak $u(y_1(s), \dots, y_N(s)) = C$ řeší rovnici (5) (homogenní lineární PDR 1. řádu).

Terminologie:

- Systém ODR (7), který lze doplnit o „počáteční” podmínku $y_1(0) = y_1^0, \dots, y_N(0) = y_N^0$ se nazývá charakteristický systém PDR 1. řádu
- Křivce $(\star)$, což je řešení charakteristického systému (7), říkáme charakteristika.

Poznámka:

Buď $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N) \in \mathbb{R}^N$ libovolný pevný bod. Pokud nám charakteristika procházející tímto bodem protne přímkou či křivku, na které máme zadaná počáteční datam pak víme, že hodnota $u(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N)$ se shoduje s hodnotou dat v průsečíku charakteristiky s křivkou s daty.



Z této úvahy vidíme, že zadání počátečních podmínek či dat na charakteristikách nás vede do nesmyslné situace.

Důležitý aspekt theorie PDR je zajistit zadávání počátečních podmínek na rozumných necharakteristických křivkách.

Př.: Homogenní transportní rce s konstantními koeficienty

Bud' $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_d)$, $T > 0$ a $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Hledáme $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \vec{x}) + \vec{b} \cdot \nabla u(t, \vec{x}) = 0 \quad \forall (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d \quad (\square)$$

$$u(0, \vec{x}) = u_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d \quad (\triangle)$$

kde $u_0, \vec{b}, T \dots$ data; $u \dots$ řešení $(\square)$ a $(\triangle)$

3 způsoby řešení**[1. řešení] Geometrický způsob**

Rovnici $(\square)$ lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right) \cdot (1, b_1, \dots, b_d) &= 0 \\ \Rightarrow \nabla_{t, \vec{x}} u \cdot (1, \vec{b}) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_{(1, \vec{b})}^{t, \vec{x}} u(t, \vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

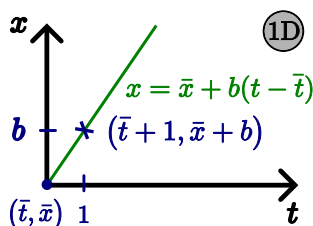
$\dots$ časoprostorová derivace fce u ve směru $(1, \vec{b})$

Odtud plyne, že u podél směru $(1, \vec{b})$ jest konstantní.

„Přímka” procházející body $(\bar{t}, \vec{x})$ se směrnici $(1, \vec{b})$ má tvar

$$(t - \bar{t}) \vec{b} = \vec{x} - \vec{x}$$

Přímka protne čas $t = 0$ v bodě $\vec{x} = \vec{x} - \bar{t} \vec{b}$



Tedy $u(\bar{t}, \bar{x}) = u_0(\vec{x} - \bar{t} \vec{b})$, $\forall (t, x)$ platí

$$u(t, x) = u_0(x - tb) \quad (8)$$

Úkol:

Ověřte, že pro $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ke u dané vztahem (8) klasickým řešením ($\square$) a ($\triangle$)

Poznámka:

Řešení typu (8) se nazývá cestující/putující vlna (angl. travelling wave).

[2. řešení] Pomocí charakteristického systému

Charakteristický systém má tvar

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{\vec{x}}(s) = \vec{b} \end{cases}$$

Jeho obecné řešení je:

$$\begin{aligned} t(s) &= s + \bar{t}, \\ \vec{x}(s) &= \vec{b}(s) + \vec{x}, \text{ kde } (\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ je libovolný bod} \end{aligned}$$

Pak fce $z(s) = u(\underbrace{s + \bar{t}}_t, \underbrace{\vec{b}s + \vec{x}}_{\vec{x}})$ splňuje $\frac{dz}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla_x u \stackrel{(\square)}{=} 0$

Tedy z je konstantní vůči s , odkud plyne:

$$\underline{u(\bar{t}, \vec{x})} = z(s)|_{s=0} = z(s)|_{s=-\bar{t}} = u(0, \vec{x} - \vec{b}\bar{t}) \stackrel{(\triangle)}{=} \underline{u_0(\vec{x} - \vec{b}\bar{t})}$$

$$\text{Neboli } \boxed{u(t, \vec{x}) = u_0(\vec{x} - \vec{b}t)}$$

[3. řešení] Fourierovou transformací**Opakování:**

$$\hat{u}(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t, \vec{y}) e^{-2\pi i \vec{x} \cdot \vec{y}} d\vec{y}; \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}(t, \vec{x}) = 2\pi i x_j \hat{u}(t, \vec{x})$$

$$\text{Aplikujeme FT na } (\square): \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \vec{x}) + 2\pi i \vec{x} \cdot \vec{b} \hat{u}(t, \vec{x}) = 0$$

$$(\triangle): \quad \hat{u}(0, \vec{x}) = \hat{u}_0(\vec{x})$$

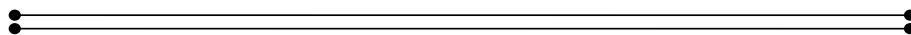
$$\begin{aligned}
\text{Aplikace FT na } (\square) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{u}(t, \vec{x}) e^{2\pi i \vec{x} \cdot \vec{b}t} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \hat{u}(t, \vec{x}) = \hat{u}_0(x) e^{-2\pi i \vec{x} \cdot \vec{b}t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(\vec{y}) e^{-2\pi i \vec{x} \cdot \vec{y}} e^{-2\pi i \vec{x} \cdot \vec{b}t} d\vec{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(\vec{y}) e^{-2\pi i \vec{x} \cdot \overbrace{(\vec{y} + \vec{b}t)}^{\vec{\xi}}} d\vec{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(\vec{\xi} - \vec{b}t) e^{-2\pi i \vec{x} \cdot \vec{\xi}} d\vec{\xi} \\
&= \underline{u_0(\bullet - \vec{b}t) |_{\vec{x}}}
\end{aligned}$$

$$\text{Tedy } \boxed{u(t, \vec{x}) = u_0(\vec{x} - \vec{b}t)}$$

Nadále budeme používat řešení 2 = metodou charakteristik, neboť je nejuni-verzálnější, funguje (theoreticky) pro $\vec{b}$ závislé na čase a prostoru.

K nalezení analytického vzorečku potřebujeme však umět vyřešit charakteris-tický systém (7), a jest-li $n > 2$, pak potřebujeme nalézt všechna nezávislá řešení systému (7).

Doporučená literatura: O. John, J. Nečas: „Rovnice matematické fyziky”, 1972



Z minulého cvičení plyne následující tvrzení:

Věta 3.

Jest-li $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, pak $u(t, x) = u_0(x - bt)$ je jediné C^1 řešení úlohy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla u &= 0 & \text{v } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \bullet) &= u_0(x) & \text{v } \mathbb{R}^d \end{aligned} \quad (\star)$$

Důkaz

Existence plyne ze vzorečku $u(t, x) = u_0(x - bt)$, pro který derivováním ověříme, že splňuje rovnici. Také triviálně ověříme nabývání počáteční podmínky.

Jednoznačnost plyne z úvah na minulém cvičení: Jest-li $u(t, x)$ řešení $(\star)$ a (t, x) libovolný, pak tímto bodem prochází jediná charakteristika, na níž je řešení konstantní. Charakteristika je přímka a hodnota na přímce je dána počáteční podmínkou.

Příklady na procvičení

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u(0, x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{array}{ll} \text{koeficienty} & \begin{array}{ll} a_0 = 1 & y_0 = t \\ a_1 = t & y_1 = x \end{array} \end{array} \xRightarrow{\text{char. systém}} \begin{array}{ll} t'(s) = 1 \\ x'(s) = t(s) \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} t(s) = s + \bar{t} \\ x(s) = \frac{s^2}{2} + \bar{t}s + \bar{x} \end{array}}$$

$$z(s) = u\left(s + \bar{t}, \frac{s^2}{2} + \bar{t}s + \bar{x}\right) \dots \text{konstantní}$$

$$\underline{u(\bar{t}, \bar{x})} = z(s)|_{s=0} = z(s)|_{s=-\bar{t}} = u\left(0, \frac{\bar{t}^2}{2} - \bar{t}^2 + \bar{x}\right) \stackrel{PP}{=} \underline{\sin\left(\bar{x} - \frac{\bar{t}^2}{2}\right)}$$

²PP = počáteční podmínka (časová)

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(t, 0) = g(t)$$

Řešení:

stejný charakteristický systém jako v $\textcircled{1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t(s) = s + \bar{t} \\ x(s) = \frac{s^2}{2} + \bar{t}s + \bar{x} \end{cases}$$

$$z(s) = u\left(s + \bar{t}, \quad \frac{s^2}{2} + \bar{t}s + \bar{x}\right) \dots \text{konstantní}$$

Pro aplikaci OP potřebujeme zjistit, pro která s je druhý člen $\frac{s^2}{2} + \bar{t}s + \bar{x} = 0$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\bar{t} \pm \sqrt{\bar{t}^2 - 2\bar{x}}$$

Tedy rovnice **nemá řešení**, pokud:

$$\bar{x} \geq 0 \quad \& \quad (\bar{t} - \sqrt{2\bar{x}})(\bar{t} + \sqrt{2\bar{x}}) < 0, \quad \text{tj. pro} \quad \bar{t} \in (-\sqrt{2\bar{x}}, +\sqrt{2\bar{x}})$$

Tedy na množině $\{(\bar{t}, \bar{x}) : \bar{x} > 0 \wedge \bar{t} \in (-\sqrt{2\bar{x}}, +\sqrt{2\bar{x}})\}$ **řešení neexistuje!**

Na doplňku této množiny:

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = z(s)|_{s=0} = z(s)|_{s=-\bar{t} \pm \sqrt{\bar{t}^2 - 2\bar{x}}} = u\left(\pm\sqrt{\bar{t}^2 - 2\bar{x}}, 0\right) \stackrel{OP}{=} \underline{g\left(\pm\sqrt{\bar{t}^2 - 2\bar{x}}\right)}$$

Tedy g **musí** být sudá funkce!

³OP = okrajová podmínka (prostorová)

③ Najděte obecné řešení rovnice

$$y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$$

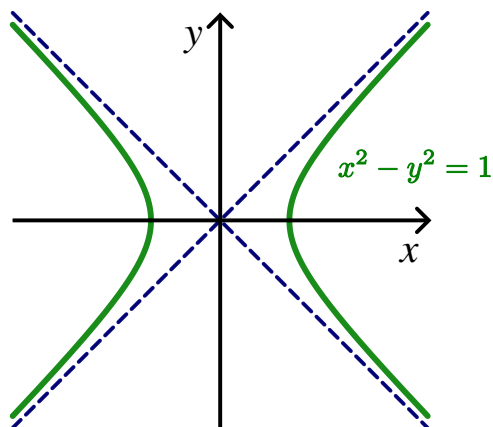
Řešení:

$$\begin{array}{llll} \text{koeficienty} & a_0 = 1 & a_0 = y & \\ & a_1 = t & a_1 = x & \end{array} \quad \begin{array}{l} \implies \\ \text{char. systém} \end{array} \quad \begin{array}{l} x'(s) = y(s) \\ y'(s) = x(s) \end{array} \quad \begin{array}{l} / \quad \cdot (x(s)) \\ / \quad \cdot (-y(s)) \end{array}$$

$$x'(s)x(s) - y'(s)y(s) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x^2(s) - y^2(s)) = 0 \quad \implies \quad \begin{array}{l} \text{charakteristiky splňují} \\ \underline{x^2(s) - y^2(s) = \text{konst.}} \end{array}$$

Protože řešení u je konstantní po charakteristikách, platí že $u(x, y) = g(x^2 - y^2)$ je **třída obecných řešení** pro $g \in C^1$ libovolné.



Malá exkurse do světa nelineárních PDR

① Uvažujme nelineární rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} &= u^2 & \text{v} & (0, \infty) \times \mathbb{R} & \text{(N)} \\ u(0, \bullet) &= u_0(x) & \text{v} & \mathbb{R} \end{aligned}$$

Použijeme opět metodu charakteristik: $z(s) = u(s + \bar{t}, bs + \bar{x})$ pro nulovou pravou stranu.

Pak:

$$\begin{aligned} z'(s) &= z^2(s) & \Longleftrightarrow & & z^{-2}(s)z'(s) &= -1 \\ z(-\bar{t}) &= u_0(x - b\bar{t}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (z^{-1}(s))' = -z^{-2}(s)z'(s) = -1 \quad / \int_{-\bar{t}}^s$$

$$\frac{1}{z(s)} - \frac{1}{z(-\bar{t})} = -s - \bar{t}$$

$$\Rightarrow z(s)^{-1} = \frac{1 - (s + \bar{t})z(-\bar{t})}{z(-\bar{t})}$$

$$\Rightarrow z(s) = \frac{z(-\bar{t})}{1 - (s + \bar{t})z(-\bar{t})}$$

$$s = 0 : \quad u(\bar{t}, \bar{x}) = \frac{u_0(\bar{x} - b\bar{t})}{1 - \bar{t}u_0(\bar{x} - b\bar{t})}$$

$$\boxed{u(t, x) = \frac{u_0(x - bt)}{1 - tu_0(x - bt)}} \quad (\star)$$

Vidíme, že $(\star)$ má smysl pokud $1 - tu_0(x - bt) > 0$. Tedy, úloha (N) má jediné řešení definované na $[0, T_{max})$, kde

$$\begin{aligned} T_{max} &= +\infty, & \text{pokud} & & u_0 \leq 0 & \text{všude v } \mathbb{R} \\ T_{max} &= \frac{1}{\sup_{y \in \mathbb{R}} u_0(y)}, & \text{pokud} & & u_0 > 0 & \text{všude v } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Navíc, pokud nastane druhý případ, tak

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} u(t, x) \longrightarrow +\infty \quad \text{pro } t \rightarrow (T_{max})^-$$

Tomuto jevu, kdy řešení „exploduje“, se říká „blow up“. Nelineární rovnice nemusí mít řešení na libovolném intervalu. 

② Uvažujme počáteční úlohu - **Burgersovu rovnici**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & \text{v} & (0, \infty) \times \mathbb{R} & (\text{🍔 B}) \\ u(0, \bullet) &= u_0(x) & \text{v} & \mathbb{R} \end{aligned}$$

Poznámka:

1) Všimněme si, že Burgersovu rovnici lze psát ve tvaru „zákona zachování“

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

Vezmeme-li $\int_{-R}^R$ a provedeme $\lim_{R \rightarrow \infty}$, pak za podmínky $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} u(t, x) = 0$, dostáváme:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\mathbb{R}} u(t, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \, dx}$$

$$\text{👉} \left(\text{podmínka neměnnosti } \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \, dx \text{ v čase} \right)$$

Úkol:

Ukažte, že $\|u(t, \bullet)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$

2) Burgersova rovnice je jednoduchá „nelineární“ PDR, která je „součástí“ mnoha systémů PDR mechaniky tekutin a pevných těles.

Řešitelnost (🍔 B)

Pokud u jest řešením (🍔 B), pak víme, že u jest konstantní na charakteristikách, které jsou dány komplikovaným systémem ODR:

$$\begin{aligned} a_0 = 1 \quad y_0 = t \\ a_1 = u \quad y_1 = x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} t'(s) = 1 & s \quad t(0) = \bar{t} \\ x'(s) = u(s, x(s)) & \text{podmínkami} \quad x(0) = \bar{x} \end{array}} \quad (\text{C})$$

Charakteristický systém závisí na (hledaném) řešení a je obtížné ho řešit.

Uvažujme:

- (i) u jest konstantní na charakteristikách daných (C)
- (ii) u udává v (C) směrnici tečny k charakteristice $\dots [1, u(s, x(s))]$

$\Rightarrow$ Z toho vyplývá, že **směrnice k charakteristikám se nemění.**
 $\Rightarrow$ Směrnice jsou přímky!

Odvodíme, že u jest dané vztahem:

$$\boxed{u(t, x + u_0(x)t) = u_0(x)}$$

Skutečně:

$$\begin{aligned} \begin{aligned} t(s) &= s + \bar{t} \\ x(s) &= Cs + \bar{x} \end{aligned} &\Rightarrow u(\bar{t}, \bar{x}) = u(t(s), x(s)) \Big|_{s=0} \\ &= u(t(s), x(s)) \Big|_{s=-\bar{t}} \\ &= u(0, \bar{x} - C\bar{t}) \\ &= u(\bar{x} - C\bar{t}), \end{aligned}$$

$$\text{kde} \quad C = u(t(s), x(s)) \Big|_{s=-\bar{t}} = u_0(\bar{x} - C\bar{t})$$

substitucí $\bar{y} = \bar{x} - C\bar{t}$ dostaneme:

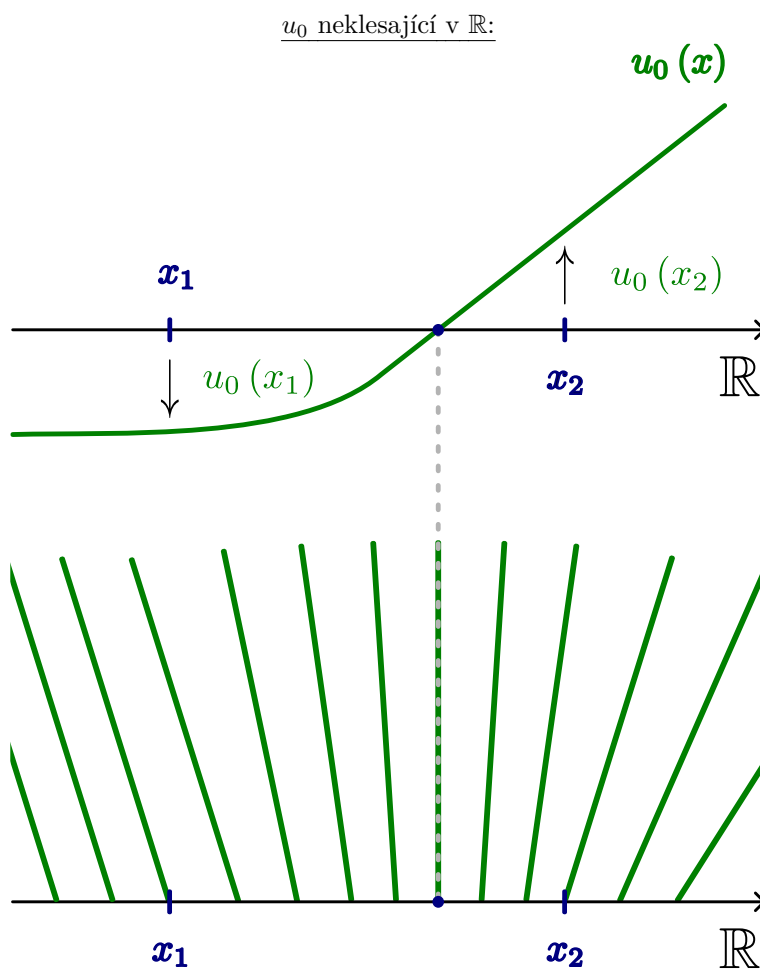
$$\begin{aligned} u(\bar{t}, \bar{y} + C\bar{t}) &= u_0(\bar{y}) \\ \underline{u(\bar{t}, \bar{y} + u_0(\bar{y})\bar{t})} &= u_0(\bar{y}) \end{aligned}$$

Což jsme chtěli!

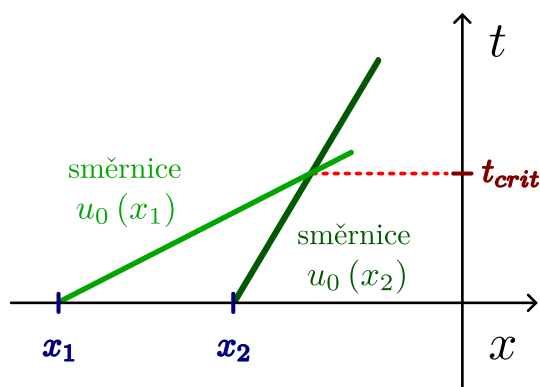
Grafický náhled: Pro $t \geq 0$

Jest-li u_0 neklesající v $\mathbb{R}$, pak charakteristika (přímka) vycházející z x_1 má menší směrnici (rovnou $u_0(x_1)$) než charakteristika (přímka) vycházející z x_2 pro $x_1 < x_2$

Charakteristiky se tedy neprotínají a hodnota řešení jest dána hodnotou na počátku.



Naopak existuje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ tak, že $u_0(x_1) > u_0(x_2)$, pak se směrnice $u_0(x_1)$ a $u_0(x_2)$ protnou v čase t_{crit} a klasické řešení nemůže pak existovat pro $t \geq t_{crit}$. Vzniká rázová vlna.



Tedy problém (🍔B) nemůže mít klasické řešení $u \in ((0, \infty) \times \bar{\mathbb{R}}) \cap C([0, \infty) \times \mathbb{R})$.

Zkusme pojem řešení oslabit. Buď $\varphi \in C_0^1((-\infty, T) \times \mathbb{R})$ libovolná.

Násobme (🍔B) φ a integrujme $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} dx dt$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi + u \frac{\partial u}{\partial x} \varphi \right) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi + \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial}{\partial x} (u^2) \right) dx dt \\ &\Rightarrow [\text{per partes} + \varphi \text{ kompaktní nosič v } \mathbb{R} + \varphi(T) = 0] \Rightarrow \\ &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dx dt - \int_{\mathbb{R}} u(0, x) \varphi(0, x) dx - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx}$$

(🍔SB)

Ve formulaci (🍔SB) nemusíme nic vědět o derivacích funkce u , stačí nám pouze vědět, že u jest lokálně integrovatelná!

Diferenciální operátory se přesunuly na testovací funkci $\varphi \dots$ distributivní derivace

Lemma 4.

- 1) Pokud u jest klasické řešení (🍔B), pak u je i řešení (🍔SB), tj. u jest slabé řešení problému (🍔SB).
- 2) Pokud u jest slabé řešení a navíc pokud $u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$, potom u jest i klasické řešení.

Důkaz

- 1) Dokázáno.
- 2) Protože $u \in C^1$, můžeme v (🍔SB) provést per partes:

$$\begin{aligned}
 0 &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx \\
 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi dx dt + \int_{\mathbb{R}} (u(0, x) - u_0(x)) \varphi(0, x) dx \quad (*)
 \end{aligned}$$

- a) Buď $\varphi \in C_0^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ libovolné, potom

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi dx dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{v } (0, T) \times \mathbb{R}$$

- b) Užitím a) v (*) $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (u(0, x) - u_0(x)) \varphi(0, x) dx = 0$

Protože $\varphi(0, x)$ může být libovolná hladká funkce, dostáváme, že $u(0, x) = u_0(x)$ v $\mathbb{R}$.

Shrnutí:

Pojem slabé řešení jest konsistentní s pojmem klasického řešení. Neboli, každé klasické řešení jest i slabé řešení a každé slabé řešení, které jest i C^1 , jest i klasické řešení.

Slabé řešení jest užitečné ke studiu nespojitosti.

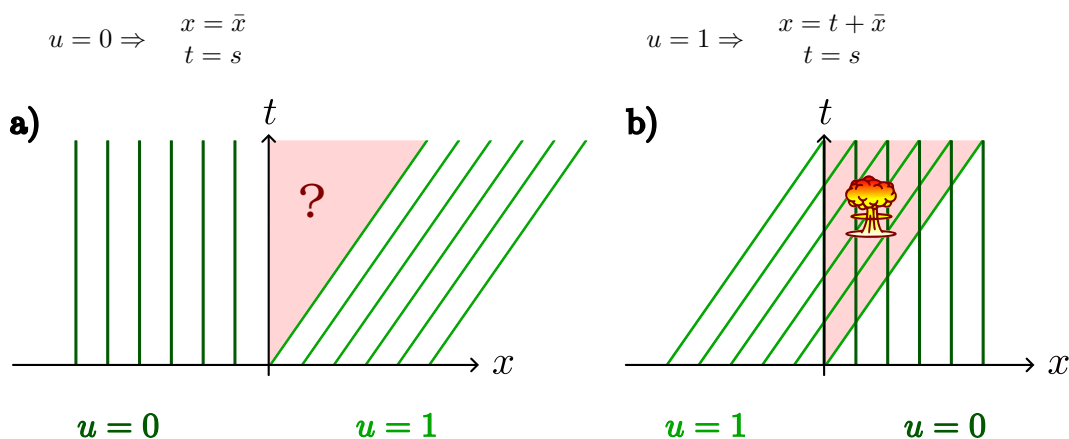
②

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{v} \quad (0, T) \times \mathbb{R}$$

$$\text{a) } u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \left| \quad \text{b) } u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{charakteristiky: } \begin{aligned} t'(s) &= 1 \\ x'(s) &= u(t(s), x(s)) \end{aligned}$$

Řešení u jest konstantní po charakteristikách, proto pokud charakteristika prochází bodem $u(0, x)$, pak hodnota u bude 0, nebo 1.



Dostáváme tak problém v a) i b) na množině $S = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, t = x > 0\}$

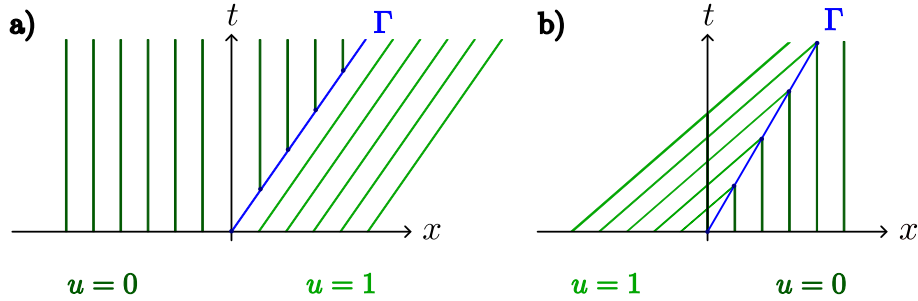
Pro

- a) nevíme, co zadat v S ... nemáme tam charakteristiky
- b) nevíme, co zadat v S ... kříží se nám tam 2 charakteristiky

Pokus o vyřešení problému:

Vezměme $\alpha > 0$ a definujme $\Gamma = \{(t, x) : t, x \geq 0, t = \alpha x\}$

Řešení u jako na obrázcích:



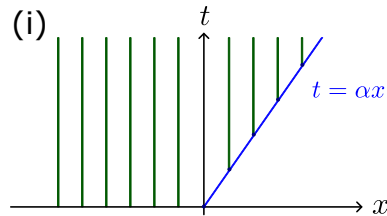
Tedy u je po částech konstantní a nespojitost má pouze na Γ .

Dosaďme do slabé formulace a ověříme, jak musí vypadat Γ (tj. čemu je rovno α).

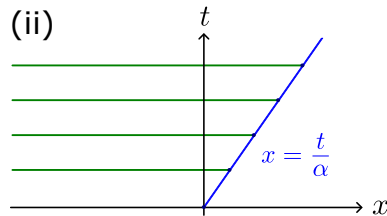
Pracujeme jen pro b) Buď $\varphi \in C_0^1((-\infty, T) \times \mathbb{R})$

$$0 = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx =$$

$$= \begin{matrix} \text{vlevo } u = 1 \\ \text{vpravo } u = 0 \end{matrix} = - \int \int_{\{\alpha x < t, t > 0\}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt - \int_{-\infty}^0 \varphi(0, x) dx = (*)$$



$$\begin{aligned} & - \int \int_{\{\alpha x < t, t > 0\}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt = \\ & - \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx - \int_0^{\infty} \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx = \\ & = \varphi \dots \text{ má kompaktní nosič } = \\ & = \int_{-\infty}^0 \varphi(0, x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(\alpha x, x) dx \end{aligned}$$

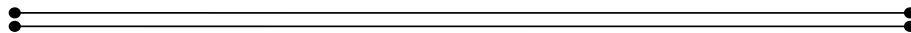


$$\begin{aligned} & - \int \int_{\{\alpha x < t, t > 0\}} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt = \\ & - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{t/\alpha} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt = \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varphi \left(t, \frac{t}{\alpha} \right) dt = \\ & \Rightarrow [t = \alpha x] \Rightarrow - \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha x, x) dx \end{aligned}$$

$$(*) = \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \int_0^{\infty} \varphi(\alpha x, x) dx$$

Tedy, aby u bylo slabé řešení, musí být pravá strana nulová pro každé φ a to vede k volbě $\alpha = 2$.

V případě b) jsme určili polohu šoku.



Nehomogenní transportní rovnice s konstantními koeficienty

Ukážeme si, jak pomocí metody charakteristik řešit následující problém

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla u + cu &= f & \text{v} & (0, \infty) \times \mathbb{R}^d & (*) \\ u(0, \bullet) &= u_0 & \text{v} & \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

kde $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : (0, T) \times \mathbb{R}^d$ jsou data úlohy.

$$\begin{array}{ll} \text{Charakteristický} & t'(s) = 1 \\ \text{systém:} & \vec{v}'(s) = \vec{b} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} t'(s) = 1 & \text{pro } (\bar{t}, \vec{x}) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d \\ \vec{v}'(s) = \vec{b} & \text{libovolné} \end{array}$$

Definujeme jako dříve $z(s) = u(\overbrace{s + \bar{t}}^{t(s)}, \underbrace{\vec{b}s + \vec{x}}_{\vec{x}(s)})$ pro které platí

$$z'(s) = \frac{\partial u}{\partial t}(s + \bar{t}, \vec{b}s + \vec{x}) + \vec{b} \cdot \nabla u(s + \bar{t}, \vec{b}s + \vec{x})$$

a tedy z (*) máme

$$z'(s) + cz(s) = f(s + \bar{t}, \vec{b}s + \vec{x}) \quad / \cdot e^{cs}$$

Řešíme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(z(s)e^{cs}) &= f(s + \bar{t}, \vec{b}s + \vec{x}) e^{cs} \quad / \int_{-\bar{t}}^0 ds \\ z(0) &= z(-\bar{t}) e^{-c\bar{t}} + \int_{-\bar{t}}^0 f(s + \bar{t}, \vec{b}s + \vec{x}) e^{cs} ds \end{aligned}$$

Substitucí $[s' = s + \bar{t}]$ dostáváme

$$u(\bar{t}, \vec{x}) = u_0(\vec{x} - \vec{b}\bar{t}) e^{-c\bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} f(s', \vec{b}(s' - \bar{t}) + \vec{x}) e^{c(s' - \bar{t})} ds'$$

odstraníme pruhy nad t a x a dostáváme hledané řešení

$$u(t, \vec{x}) = u_0(\vec{x} - \vec{b}t) e^{-ct} + \int_0^t f(s, \vec{b}(s - t) + \vec{x}) e^{-c(t-s)} ds$$

Všimněme si, že pro $c > 0$ se tlumí velikosti dat exponenciálně, pro $c < 0$ se velikosti dat zesilují.

Odvození d'Alembertova vzorečku pomocí výsledků pro transportní rovnici

Uvažujme vlnovou rovnici:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2PP : \quad u(0, x) = u_0(x) \\ \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \big|_{t=0} = u_1(x) \end{array}} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\mathfrak{W}) \\ \Downarrow \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (\mathfrak{H}) \end{array}$$

Označme $v := \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial u}{\partial x}$

Pokud u řeší $(\mathfrak{W})$, pak člen $\frac{\partial v}{\partial t} + k \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ a platí

$$v(t, x) = G(x - kt) \quad (\mathfrak{A})$$

$\Rightarrow$ Z $(\mathfrak{H})$ a $(\mathfrak{A})$ plyne, že u splňuje

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial u}{\partial x} = G(x - kt)$$

Postupujeme jako v případě nehomogenní transportní rovnice.

Charakteristický systém: $\begin{array}{l} t'(s) = 1 \\ x'(s) = -k \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t = s + \bar{t} \\ x = -ks + \bar{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{a definujeme} \\ z(s) = u(s + \bar{t}, \bar{x} - ks) \end{array}$

$z(s)$ splňuje:

$$\begin{aligned} z'(s) &= G(\bar{x} - ks - k(s + \bar{t})) \quad / \int_{-\bar{t}}^0 ds \\ u(\bar{t}, \bar{x}) &= u_0(\bar{x} + k\bar{t}) + \int_{-\bar{t}}^0 G(\underbrace{\bar{x} - 2ks - k\bar{t}}_{y \Rightarrow -2k ds = dy}) ds \\ &= u_0(\bar{x} + k\bar{t}) + \int_{\bar{x} + k\bar{t}}^{\bar{x} - k\bar{t}} \left(-\frac{1}{2k} \right) G(y) dy \end{aligned}$$

$$\left(\Rightarrow \right) \quad \boxed{u(t, x) = u_0(x + kt) + \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} G(y) dy} \quad \text{řeší } (\mathfrak{W}) \text{ s PP } u(0, x) = u_0(x)$$

Zbývá 2. PP $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \big|_{t=0} = u_1(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= ku'_0(x + kt) + \frac{1}{2} (G(x + kt) + G(x - kt)) \\ \underbrace{t=0}_{z2.PP} \quad u_1(x) &= ku'_0(x + kt) + G(x) \quad \Rightarrow \quad \underline{G(x) = u_1(x) - ku'_0(x)} \end{aligned}$$

Celkem po dosazení máme:

$$u(t, x) = \frac{u_0(x + kt) + u_0(x - kt)}{2} + \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} u_1(y) \, dy$$

Fundamentální řešení ODR

$L \dots$ lineární diferenciální operátor a řešíme úlohu

$$Lu_F = \delta$$

kde $u_F \in D'$ nazýváme fundamentální řešení.

Pozorování:

Derivace $H(t) = \delta(t)$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Heaviside $H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
splňuje rovnici

$$\begin{aligned} y'(t) &= 0 \\ y(0_+) &= 1 \\ \underline{y} &= 0 \quad \text{pro } t < 0 \end{aligned}$$

Iterativně:

Jest-li $Lx(t) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t)$

a pokud $z(t)$ řeší

$$\begin{aligned} Lz(t) &= 0 \quad \text{v } (0, \infty) \\ z(0_+) &= z'(0_+) = \dots = z^{(n-2)}(0_+) = 0 \\ z^{(n-1)}(0_+) &= 1 \end{aligned}$$

pak $x_F = z(t)H(t)$ řeší

$$\underline{Lx_F = \delta(t) \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$$

K ověření stačí ukázat

$$\langle Lx_F, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$\Downarrow$

$$\langle x_F^{(n)}, \varphi \rangle + a_{n-1} \langle x_F^{(n-1)}, \varphi \rangle + \dots + a_1 \langle x_F', \varphi \rangle + a_0 \langle x_F, \varphi \rangle =$$

$\rightarrow$ [distributivní derivace] $\rightarrow$

$$= (-1)^n \langle x_F, \varphi^{(n)} \rangle + (-1)^{n-1} a_{n-1} \langle x_F, \varphi^{(n-1)} \rangle + \dots - a_1 \langle x_F, \varphi' \rangle + a_0 \langle x_F, \varphi \rangle =$$

$\rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F \in L_{\text{loc}}^1 \Rightarrow \text{jest regulární distribuce} \\ x_F = 0 \text{ na } (-\infty, 0) \end{array} \right] \rightarrow$

$$= (-1)^n \int_0^\infty z(t) \varphi^{(n)}(t) dt + (-1)^{n-1} a_{n-1} \int_0^\infty z(t) \varphi^{(n-1)}(t) dt + \dots - a_1 \int_0^\infty z(t) \varphi'(t) dt + a_0 \int_0^\infty z(t) \varphi(t) dt =$$

$\rightarrow$ [aplikujeme PP] $\rightarrow$
 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$= \underbrace{\int_0^\infty Lz(t) \varphi(t) dt}_{Lz(t)=0 \text{ v } (0, \infty)} + \underbrace{z^{(n-1)}(0)}_1 \varphi(0) = \underline{\varphi(0)}$$



Význam fundamentálního řešení pro obecný lineární diferenciální operátor

Řešení $Lx(t) = f(t)$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ získáme konvolucí f s x_f

Opravdu: $L(x_F * f) \stackrel{\substack{\text{linearita} \\ \& \text{derivace} \\ \text{konvoluce}}}{=} Lx_F * f \stackrel{\substack{x_F \text{ je} \\ \text{fundamentální} \\ \text{řešení}}}{=} \delta * f = f$

Rovnice vedení tepla

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \nabla u &= f & \text{v } Q_\infty &:= (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{v } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

kde $k^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$, $\kappa \dots$ koeficient tepelné vodivosti, $c \dots$ měrná tepelná konstanta,
 $\rho \dots$ hustota

Princip superpozice

Rovnice vedení tepla (RVT) je lineární úloha a lze ji tak rozdělit na 2 jednodušší úlohy.

$$\begin{aligned} \textcircled{i} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 &= 0 \\ u(0, \bullet) &= u_0 \text{ v } \mathbb{R}^d \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \textcircled{ii} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 &= 0 \\ u(0, \bullet) &= u_0 \text{ v } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Ukážeme, že řešení jest dáno vztahem

$$\boxed{u(t, x) = u_0 \underset{(x)}{*} e_I + f \underset{(t, x)}{*} x_F}, \quad e_I = \frac{1}{(4\pi k^2 t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4k^2 t}\right), \quad x_F = e_I H(t)$$

kde e_I jest fundamentální řešení:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k^2 \Delta\right) e_I &= 0 & \text{v } Q_\infty, \\ e_I(0, x) &= 0 & \text{v } \mathbb{R}^d \end{aligned} \tag{I}$$

kde x_F jest fundamentální řešení:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k^2 \Delta\right) x_F &= \delta(t) \otimes \delta(x) & \text{v } Q_\infty, \\ x_F(0, x) &= 0 & \text{v } \mathbb{R}^d \end{aligned} \tag{II}$$

Ad I: Aplikujeme Fourierovu transformaci na (I):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{e}_I + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{e}_I \right) (t, \xi) = 0 \\ \hat{e}_I(0, \xi) = \mathcal{F}(\delta(x)) = 1 \end{array} \right\} \longrightarrow \hat{e}_I = e^{-4\pi^2 k^2 |\xi|^2 t}$$

$$\hat{e}_I = e^{-4\pi^2 k^2 |\xi|^2 t} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e_I(t, x) = \frac{1}{(4\pi k^2 t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4k^2 t}} \quad \text{v } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$$

Ad II: Aplikujeme Fourierovu transformaci v x na (II):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{x}_F + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{x}_F \right) (t, \xi) = \delta(t) \quad \dots \text{ pro pevné } \xi \text{ hledáme fundamen-}$$

$$\hat{x}_F(0, \xi) = 0 \quad \text{tální řešení ODR 1. řádu}$$

→ Najdeme řešení:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \hat{z}}{\partial t} + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{z} = 0 \\ \hat{z}(0) = 1 \end{array} \quad \xRightarrow{Ad \textcircled{I}} \hat{z}(t) = e^{-4\pi^2 k^2 |\xi|^2 t}$$

a $\hat{x}_F = \hat{z}(t)H(t) = e^{-4\pi^2 k^2 |\xi|^2 t} H(t) \quad \text{„odfourierujeme“}$

$$x_F = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi k^2 t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4k^2 t}} & \text{v } Q_\infty \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Speciálně v 1D

Rešení úlohy $\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = 0$ je rovno

$$u(0, x) = u_0(x)$$

$$\underline{u(t, x)} = e_I * u_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4k^2 t}} * u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4k^2 t}} u_0(\xi) d\xi$$

Speciální oblast 1 - úloha na polopřímce

Úlohu na polopřímce převedeme prodloužením na přímku:

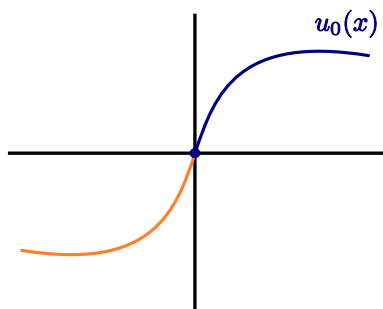
$$\begin{aligned} \text{P.P.:} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = 0 && \text{na } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ & u(x, 0) = u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{O.P.:} \quad & a) \quad u = 0 && \text{pro } x = 0 \quad \wedge \quad t > 0 \\ & b) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 && \text{pro } x = 0 \quad \wedge \quad t > 0 \end{aligned}$$

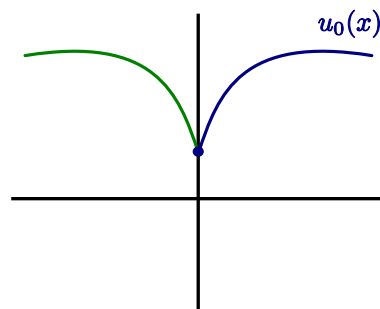
Řešíme:

a) homogenní Dirichlet $\rightarrow$ lichým prodloužením $u_0(x)$ na $\mathbb{R}$

b) homogenní Neumann $\rightarrow$ sudým prodloužením $u_0(x)$ na $\mathbb{R}$



liché prodloužení P.P. zaručí
splnění O.P. $u = 0$ pro $x = 0$,
protože i řešení bude liché



sudé prodloužení P.P. zaručí
splnění O.P. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pro $x = 0$,
protože i řešení bude sudé

Speciální oblast 2 - úloha na úsečce

Úlohu na úsečce převedeme zperiodisováním & prodloužením na přímku

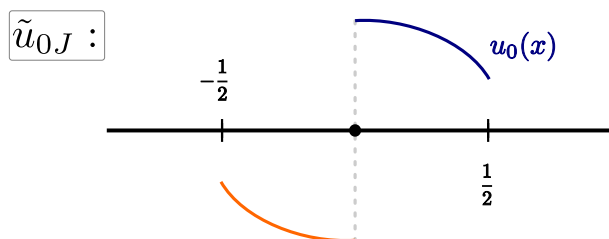
Příklad:

Máme úlohu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u &= 0 && \text{na } [0, \tfrac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= u_0(x) && x \in [0, \tfrac{1}{2}] \quad \text{P.P.} \\ u(0, t) &= u_0(\tfrac{1}{2}, t) && \text{pro } t > 0 \quad \text{O.P.} \end{aligned}$$

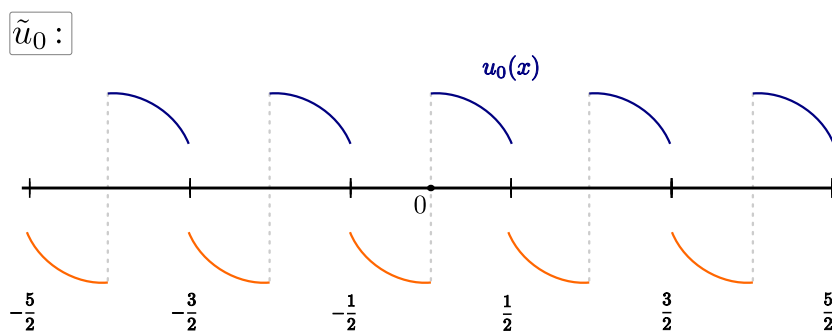
Řešení:

- 1) Nejprve liše prodloužíme na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a označíme $\tilde{u}_{0J}$, kde J označuje prodloužení na jednotkový interval.



- 2) Zperiodisujeme pomocí vzorkovací distribuce δ_Σ (Diracův hřeben)²

$$\tilde{u}_0 = \tilde{u}_{0J} * \delta_\Sigma, \quad \delta_\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$$



²V literatuře se někdy označuje písmenkem III (ša), které se podobá tvaru této distribuce

Pro $\tilde{u}_0$ řešíme počáteční úlohu a řešení jest rovno

$$u = x_F * \tilde{u}_0 = x_F * (\tilde{u}_{0,J} * \delta_\Sigma) = \left[\begin{array}{l} 2 \text{ ze } 3 \text{ distribucí} \\ \text{mají kompaktní nosič} \\ \Rightarrow (\text{asociativita platí}) \end{array} \right] = (x_F * \tilde{u}_{0,J}) * \delta_\Sigma$$

kde $\delta_\Sigma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{-m}^m \delta_m \leftarrow$ kompaktní nosič, x_F jest fundamentální řešení

Aplikujeme fourierovu transformaci na u

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \mathcal{F}(x_F) \mathcal{F}(\tilde{u}_{0,J}) \underbrace{\mathcal{F}(\delta_\Sigma)}_{=\delta_\Sigma} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \mathcal{F}(u) = \delta_\Sigma \text{ vyplývá z Poissonovy sumační formule} \\ \delta_\Sigma \text{ je nosič ve } \mathbb{Z}, \text{ ve kterých vyčíslíme } \mathcal{F}(x_F) \text{ a } \mathcal{F}(\tilde{u}_{0,J}) \end{array} \right] = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\mathcal{F}(x_F)(u)}_{e^{-4\pi^2 k^2 n^2 t}} \mathcal{F}(\tilde{u}_{0,J}) \tilde{u}_{0,J}(u) \delta_n(\xi) \end{aligned}$$

kde $\mathcal{F}(\tilde{u}_{0,J})$ jsou Fourierovy koeficienty fce $\tilde{u}_{0,J} : c_n = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u}_{0,J}(x) e^{-2\pi i n x} dx$

$\Downarrow$ „odfourierujeme“

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 k^2 n^2 t} c_n e^{2\pi i n x}$$

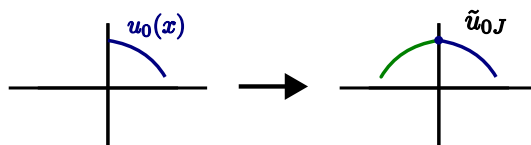
Poznámka:

Nyní jsme ukázali, jak prodlužovat v případě Dirichletových O.P.

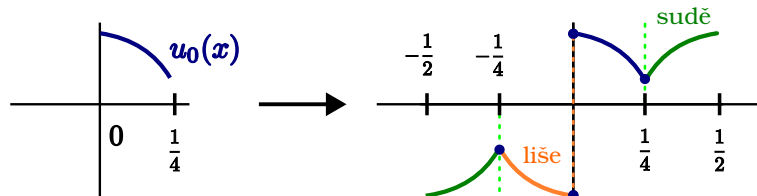
Další případy:

A $u(0, t) = u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0 \quad \dots$ prodlužujeme obojí liše (již znázorňeno)

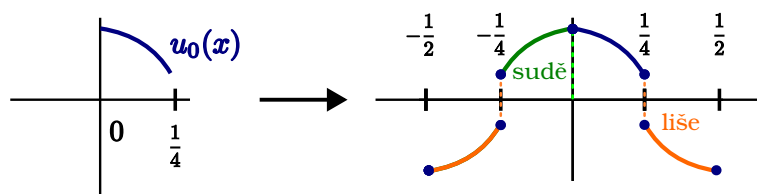
B $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0 \quad \dots$ prodlužujeme obojí sudě



C $u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{1}{4}, t \right) = 0 \quad \dots \quad \text{prodlužujeme lichó-sudě}$



D $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u \left(\frac{1}{4}, t \right) = 0 \quad \dots \quad \text{prodlužujeme sudo-liše}$



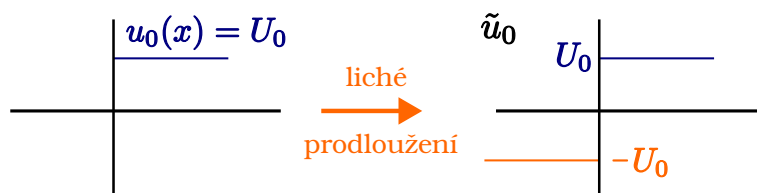
Speciální oblast 3 - úloha na kouli

Úlohu na kouli převedeme na úlohu na úsečce přechodem ke sférickým souřadnicím (viz jeden z pozdějších příkladů, [zde](#) a [zde](#)).

Příklad:

Nalezněte řešení [RVT](#) na polopřímce

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) &= 0 & t > 0 \quad \text{O.P.} \\ u(x, 0) &= U_0 = \text{konst.} & \text{pro } x > 0 \quad \text{P.P.} \end{aligned}$$



a řešíme počáteční úlohu s $\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} U_0 & x > 0 \\ -U_0 & x < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad u(t, x) x_F * \tilde{u}_0 &= \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4k^2 t}} \tilde{u}_0(\xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4k^2 t}} (-U_0) d\xi + \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4k^2 t}} (U_0) d\xi \right] = \\
\rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{x-\xi}{2k\sqrt{t}} \\ dz = \frac{-d\xi}{2k\sqrt{t}} \end{array} \right] &\rightarrow = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} 2k\sqrt{t} \left(\int_{+\infty}^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} U_0 e^{-z^2} dz - \int_{\frac{x}{2k\sqrt{t}}}^{-\infty} U_0 e^{-z^2} dz \right) = \\
&= \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz - \int_{\frac{x}{2k\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz}_{\int_{-\infty}^0 e^{-z^2} dz + \int_0^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz - \int_{\frac{x}{2k\sqrt{t}}}^0 e^{-z^2} dz - \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz} \right) = \\
&= \frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \underline{\underline{U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right)}},
\end{aligned}$$

kde $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$ je error funkce

Příklad:

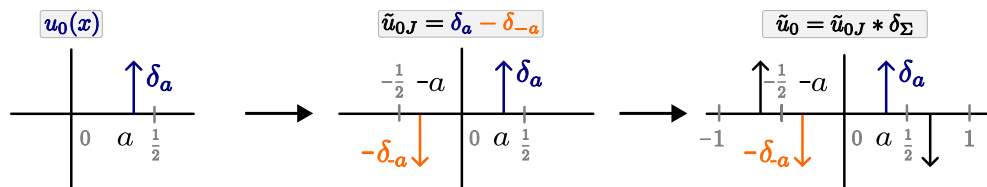
Nalezněte řešení RVT

$$\textcircled{a} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{na } [0, \tfrac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+$$

$$\text{O.P.} \quad u(0, t) = u(\tfrac{1}{2}, t) = 0$$

$$\text{P.P.} \quad u(x, 0) = \delta_a(x) \quad a \in (0, \tfrac{1}{2})$$

O.P. $\rightarrow$ prodlužujeme liše, abychom zachovali homogenního Dirichleta



$$\text{Řešení:} \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} c_n e^{2\pi i n x}, \quad \text{kde}$$

$$c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_{0,J})(n) = \mathcal{F}(\delta_a - \delta_{-a})(n) = e^{-2\pi i n a} - e^{2\pi i n a} = \underline{\underline{-2i \sin(2\pi n a)}}$$

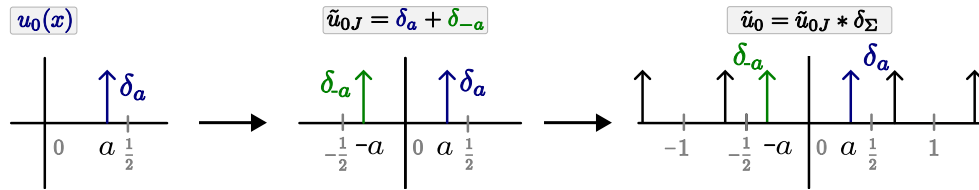
$$\begin{aligned}
\Rightarrow u(t, x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -2i \underbrace{e^{-4\pi^2 n^2 t}}_{\text{sudé } v \ n} \underbrace{\sin(2\pi na)}_{\text{liché } v \ n} (\underbrace{\cos(2\pi nx)}_{\text{sudé } v \ n} + i \underbrace{\sin(2\pi nx)}_{\text{liché } v \ n}) \\
&= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin(2\pi na) \sin(2\pi nx) \\
&= 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin(2\pi na) \sin(2\pi nx)
\end{aligned}$$

b) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ na $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+ \dots$ (stejně zadání)

O.P. $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \frac{1}{2}) = 0$

P.P. $u(x, 0) = \delta_a(x) \quad x \in (0, \frac{1}{2})$

O.P. $\rightarrow$ prodlužujeme sudě, abychom zachovali homogenního Neumanna



Řešení: $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} c_n e^{2\pi i n x}$, kde

$$c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_{0J})(n) = \mathcal{F}(\delta_a + \delta_{-a})(n) = e^{-2\pi i n a} + e^{2\pi i n a} = 2 \cos(2\pi n a)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u(t, x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2 \underbrace{e^{-4\pi^2 n^2 t}}_{\text{sudé } v \ n} \underbrace{\cos(2\pi na)}_{\text{sudé } v \ n} (\underbrace{\cos(2\pi nx)}_{\text{sudé } v \ n} + i \underbrace{\sin(2\pi nx)}_{\text{liché } v \ n}) \\
&= 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} \cos(2\pi na) \cos(2\pi nx) + 2
\end{aligned}$$

Příklad:^[zde]

Najděte radiálně symetrické řešení úlohy **RVT** v $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{v } \underbrace{B_{1/2}(\mathbf{O})}_{\subset \mathbb{R}^3} \times \mathbb{R}^+$$

$$\text{O.P. } u\left(t, \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{P.P. } u(x, 0) = \chi_{[0, a]}(r),$$

$$a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow u_0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |x| \leq a \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Převědeme úlohu na úlohu v jedné prostorové proměnné r

$$\Delta_r^{\text{3D}} v = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) \right)}_{\equiv 0 \text{ pro radiálně symetrickou funkci}} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$$

$$v(r, t) := u(|x|, t) \longrightarrow \Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv)$$

$$\downarrow \quad \text{RVT}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) = 0 \quad / \cdot r$$

$$w(r, t) := rv(r, t)$$

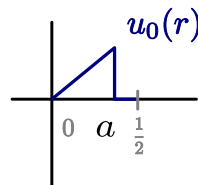
$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0} \quad \text{v } \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \mathbb{R}^+$$

Musíme transformovat ještě i podmínky!

$$\text{O.P. } w(0, t) = rv(r, t) \Big|_{r=0} = 0$$

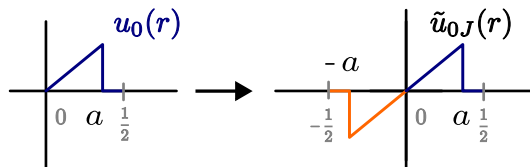
$$w\left(\frac{1}{2}, t\right) = rv(r, t) \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 0$$

$$\text{P.P. } w(r, 0) = rv(r, t) \Big|_{t=0} = r \chi_{[0, a]}(r)$$



Převodli jsme na 1D úsečku.

A prodloužíme liše:



$$w(t, r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi n^2 t} c_n e^{2\pi i n r},$$

$$\text{kde } c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_{0J})(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u}_{0J}(r) e^{-2\pi i n r} dr = \int_{-a}^a r e^{-2\pi i n r} dr$$

$$\stackrel{\text{P.P.}}{=} \left[\frac{1}{(-2\pi i n)} r e^{-2\pi i n r} \right]_{-a}^a + \frac{1}{2\pi i n} \int_{-a}^a e^{-2\pi i n r} dr$$

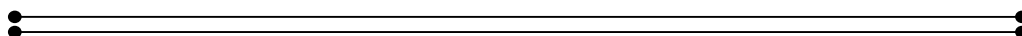
$$= \frac{1}{(-2\pi i n)} a (e^{-2\pi i n a} + e^{2\pi i n a}) + \frac{1}{4\pi^2 n^2} (e^{-2\pi i n a} - e^{2\pi i n a})$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{ia}{n\pi} \cos(2\pi n a) - \frac{i}{2\pi^2 n^2} \sin(2\pi n a)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w(t, r) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{i}{n\pi} \left(a \cos(2\pi n a) - \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n a) \right)}_{\text{liché v } n} \underbrace{e^{-4\pi^2 n^2 t}}_{\text{sudé v } n} \underbrace{(\cancel{\cos(2\pi n r)} + i \sin(2\pi n r))}_{\substack{\text{sudé v } n \\ \text{liché v } n}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i}{n\pi} \left(\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n a) - a \cos(2\pi n a) \right) e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin(2\pi n r) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n a) - a \cos(2\pi n a) \right) e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin(2\pi n r) \end{aligned}$$

A provedeme resubstituci:

$$\Rightarrow \boxed{v(t, r) = \frac{w(t, r)}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n a) - a \cos(2\pi n a) \right) e^{-4\pi^2 n^2 t} \frac{\sin(2\pi n r)}{r}}$$



Vlnová rovnice

$$\overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \Delta u = f}^{\square u} \quad \text{v } Q_\infty := (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{v } \mathbb{R}^d$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \quad \text{v } \mathbb{R}^d$$

Princip superposice: 3 jednotlivé úlohy

I	$\square u = 0$ $u(0, x) = u_0(x)$ $u_t(0, x) = 0$	II	$\square u = 0$ $u(0, x) = 0$ $u_t(0, x) = u_1(x)$	III	$\square u = f$ $u(0, x) = 0$ $u_t(0, x) = 0$	$\left. \begin{array}{l} \text{v } Q_\infty \\ \text{v } \mathbb{R}^d \end{array} \right\}$
---	--	----	--	-----	---	---

Ukážeme, že řešení jest dáno vztahem:

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(u_0 *_{(x)} e^\Pi + u_1 *_{(x)} e^\Pi + f *_{(t,x)} (H(t) e^\Pi) \right)$$

neboli $e^I = \frac{\partial e^\Pi}{\partial t}$ a $x_F = H(t) e^\Pi$ a e^I, e^Π, x_F jsou fundamentální řešení rovnic

I	$\square e^I = 0$ $e^I(0, x) = \delta(x)$ $\frac{\partial e^I}{\partial t}(0, x) = 0$	II	$\square e^\Pi = 0$ $e^\Pi(0, x) = 0$ $\frac{\partial e^\Pi}{\partial t}(0, x) = \delta(x)$	III	$\square x_F = \delta(t) \otimes \delta(x)$ $x_F(0, x) = 0$ $\frac{\partial x_F}{\partial t}(0, x) = 0$
---	---	----	---	-----	---

Ⓐ Souvislost e^I a e^{II}

Aplikujeme FT³ na $\square u = 0$: $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t^2} + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0$

řešení $\hat{u} = A \sin(2\pi k |\xi| t) + B \cos(2\pi k |\xi| t)$ P.P. pro Ⓘ :

$$\begin{aligned} \hat{u}(0, \xi) = \mathcal{F}(\delta(x)) = 1 & \Rightarrow B = 1 \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) = 0 & \Rightarrow A = 0 \end{aligned} \Rightarrow \underline{\hat{e}^I = \cos(2\pi k |\xi| t)}$$

P.P. pro Ⓜ :

$$\begin{aligned} \hat{u}(0, \xi) = 0 & \Rightarrow B = 0 \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) = \mathcal{F}(\delta(x)) = 1 & \Rightarrow A = \frac{1}{2\pi k |\xi|} \end{aligned} \Rightarrow \underline{\hat{e}^{II} = \frac{\sin(2\pi k |\xi| t)}{2\pi k |\xi|}}$$

A pro $\xi = 0$ dodefinujeme $\hat{e}^{II} = \frac{\sin(2\pi k |\xi| t)}{2\pi k |\xi|}$ limitou,

$$\text{tedy } \hat{e}^{II} = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi k |\xi| t)}{2\pi k |\xi|} & \xi \neq 0 \\ t & \xi = 0 \end{cases}$$

Pozorujeme, že

$$\underbrace{\hat{e}^I}_{\cos(2\pi k |\xi| t)} = \overbrace{\frac{\partial \hat{e}^{II}}{\partial t}}^{\frac{\sin(2\pi k |\xi| t)}{2\pi k |\xi|}} \xrightarrow[\text{v } x]{\mathcal{F}^{-1}} e^I = \frac{\partial e^{II}}{\partial t}$$

³FT = Fourierova transformace

ⓑ Souvislost x_F a e^Π

Aplikujeme FT_(v x) na $\square x_F = \delta(t) \otimes \delta(x)$

$$x_F(0, x) = 0$$

$$\frac{\partial x_F}{\partial t}(0, x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{x}_F}{\partial t^2} + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{x}_F = \delta(x) \quad \rightarrow \quad \text{Hledáme fundamentální řešení ODR s pevným } \xi.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tedy hledáme řešení} \\ \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial t^2} + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{z} = 0 \\ \hat{z}(0) = 0 \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial t}(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Totéž, co jsme} \\ \text{řešili pro } \hat{e}^\Pi \end{array}$$

$$\text{Tedy} \quad \hat{z} = \hat{e}^\Pi \quad \text{a} \quad \hat{x}_F = H(t) e^\Pi$$

$$\Rightarrow \underline{x_F = H(t) e^\Pi}$$

Pro $N = 1$, tj. v $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}$ umíme odfourierovat.

Protože $\mathcal{F}(\chi_{[-a, a]})(\xi) = \frac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi} = \frac{\sin(2\pi a |\xi|)}{\pi |\xi|}$, platí:

- $e^\Pi(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sin(2\pi k |\xi| |t|)}{2\pi k |\xi|} \text{sgn}(t) \right) = \frac{\text{sgn}(t)}{2k} \chi_{[-k|t|, k|t|]}(x)$
- $x_F(x, t) = \frac{1}{2k} \chi_{[-k|t|, k|t|]}(x) \cdot \chi_{[0, \infty]}(t)$

d'Alembertův vzorec

Pro obecnou počáteční úlohu v $\mathbb{R}^1$ lze odvodit řešení ve tvaru (**d'Alembertův vzorec**):

$$\square u = f(x, t) \quad (f = 0 \text{ pro } t < 0)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \frac{\partial e^\Pi}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x_F \underset{(x,t)}{*} f + e^\Pi \underset{(x)}{*} u_1 + \overbrace{e^I}^{\frac{\partial e^\Pi}{\partial t}} \underset{(x)}{*} u_0 = E \underset{(x,t)}{*} f + e_1 \underset{(x,t)}{*} u_1 + \frac{\partial}{\partial t} (e_2 \underset{(x,t)}{*} u_0) = \\ &= \frac{1}{2k} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-k|t|, k|t|]}(x-s) \chi_{[0, \infty)}(t-\tau) f(s, \tau) \, ds \, d\tau \\ &+ \frac{1}{2k} \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(t) \chi_{[-k|t|, k|t|]}(x-s) u_1(s) \, ds \\ &+ \frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(t) \chi_{[-k|t|, k|t|]}(x-s) u_0(s) \, ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u(x, t) &= \frac{1}{2k} \int_0^t \int_{x-k(t-\tau)}^{x+k(t-\tau)} f(\tau, s) \, ds \, d\tau \\ &+ \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} u_1(s) \, ds + \frac{1}{2} (u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) \end{aligned}$$

Okrajové úlohy

- Používáme stejné metody jako u [RVT](#), **sudé** a **liché** prodlužování
- Pro úlohu na úsečce máme řešení ve tvaru řady $(\tilde{u}_J * \delta_\Sigma)$

$$\square u(x, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$u_t(x, 0) = u_1$$

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(e^{\text{II}}) c_n e^{2\pi i n x},$$

$$\text{kde } c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_1^J) = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u}_1^J e^{-2\pi i n x} dx$$

$$\square u(x, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u_0$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(e^{\text{I}}) c_n e^{2\pi i n x},$$

$$\text{kde } c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_0^J) = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u}_0^J e^{-2\pi i n x} dx$$

Příklad 8:

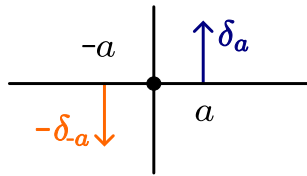
Řešte vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^+$ s podmínkami:

$$\square u = 0 \quad x \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+$$

P.P. $u(0, x) = 0$

$$u_t(0, x) = \delta_a, \quad a > 0$$

O.P. $u(t, 0) = 0$



Prodloužíme liše P.P., abychom zajistili splnění O.P.

$$\Rightarrow \text{převodli jsme na } \mathbb{R} \Rightarrow u = e^{\text{II}} * (\delta_a - \delta_{-a})$$

kde e^{II} je fundamentální řešení 1. počáteční úlohy:

$$\square e^{\text{II}} = 0$$

$$e^{\text{II}}(0, x) = 0$$

$$\frac{\partial e^{\text{II}}}{\partial t}(0, x) = \delta(x)$$

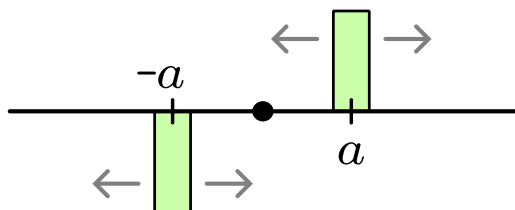
$$e^{\text{II}} = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sin(2\pi|\xi|kt)}{2\pi|\xi|k} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2k} \chi_{[-kt, kt]} & t > 0 \\ -\frac{1}{2k} \chi_{[-k|t|, k|t|]} & t < 0 \end{cases}$$

$$e^{\text{II}} = \frac{\text{sgn}(t)}{2k} \chi_{[-k|t|, k|t|]}$$

Tedy:

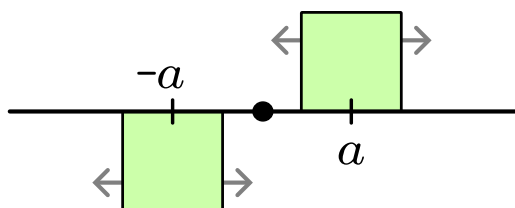
$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{2 \text{sgn}(t)}{2k} \chi_{[-k|t|, k|t|]} * (\delta_a - \delta_{-a}) \\ &= \frac{2 \text{sgn}(t)}{2k} \left(\chi_{[-k|t|, k|t|]}(x-a) - \chi_{[-k|t|, k|t|]}(x+a) \right) \\ &= \frac{2 \text{sgn}(t)}{2k} \left(\chi_{[-k|t|+a, k|t|+a]}(x) - \chi_{[-k|t|-a, k|t|-a]}(x) \right) \end{aligned}$$

Jak vypadá řešení fyzikálně?

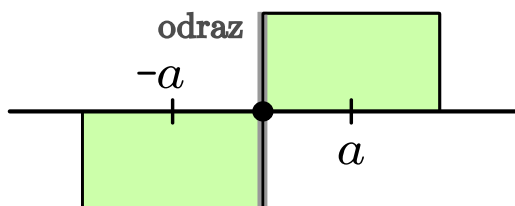


$$t = 0 + \varepsilon$$

Dirac v rychlosti
(„rozplývající se” Dirac)

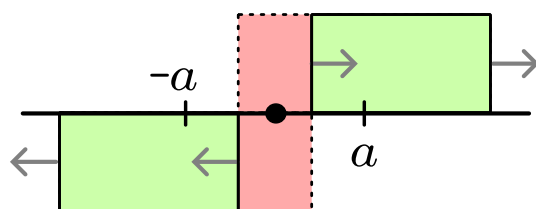


$$t = t_1 < \frac{a}{k}$$



$$t = \frac{a}{k}$$

$$u = \frac{1}{2k} (\chi_{[0, 2a]} - \chi_{[-2a, 0]})$$



$$t > \frac{a}{k} \quad \left(t = \frac{3}{2} \frac{a}{k} \right)$$

$$u = \frac{1}{2k} \left(\chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{5}{2}a]} - \chi_{[-\frac{5}{2}a, \frac{a}{2}]} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\chi_{[\frac{a}{2}, \frac{5}{2}a]} - \chi_{[-\frac{5}{2}a, -\frac{a}{2}]} \right)}_{\text{na délce interv. } 2a}$$

Příklad 9a):

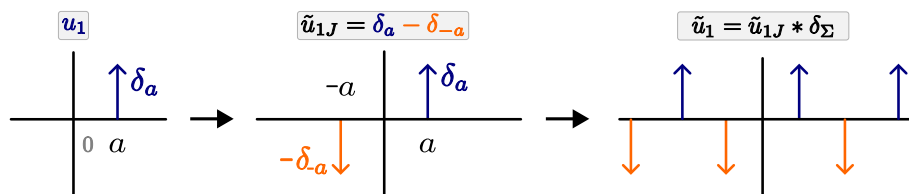
$$\square u = 0 \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), t \in \mathbb{R}^+$$

P.P. $u(0, x) = 0$

$$u_t(0, x) = \delta_a \quad a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

O.P. $u(t, 0) = u\left(t, \frac{1}{2}\right) = 0$

Postupujeme jako u [RVT](#), prodloužíme liše kvůli homogenní Dirichletově O.P. a zperiodisujeme:

**Řešení:**

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{\sin(2\pi k|n|t)}{2\pi k|n|}}_{\mathcal{F}(e)} c_n e^{2\pi i n x}$$

$n = 0 \dots = t$, což odpovídá $\lim_{n \rightarrow 0}$

$$c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_{1J}) = \mathcal{F}(\delta_a - \delta_{-a}) = e^{-2\pi i n a} - e^{2\pi i n a} = \underline{-2i \sin(2\pi n a)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi k n t)}{2\pi k n} (-2i) \sin(2\pi n a) (\cancel{\cos(2\pi n x)} + i \sin(2\pi n x)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi k n t)}{\pi k n} \sin(2\pi n a) \sin(2\pi n x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin(\overbrace{2\pi k t n}^{\alpha}) \sin(\overbrace{2\pi a n}^{\beta}) \sin(\overbrace{2\pi x n}^{\gamma})}{\pi k n} \\ &= \frac{2}{\pi k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha n) \sin(\beta n) \sin(\gamma n)}{n} = \dots \end{aligned}$$

Využijeme součtových vzorců

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} (\cos(A+B) + \cos(A-B))$$

$$u = \frac{2}{\pi k} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((\alpha - \beta + \gamma)n) + \sin((\alpha + \beta - \gamma)n) - \sin((\alpha - \beta - \gamma)n) - \sin((\alpha + \beta + \gamma)n)}{n}$$

To lze sečíst, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & x \in (0, 2\pi) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Příklad 9b):

$$\square u = 0 \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), t \in \mathbb{R}^+$$

P.P. $u(0, x) = 0$

$$u_t(0, x) = \delta_a$$

O.P. $u_x(t, 0) = u_x\left(t, \frac{1}{2}\right) = 0$

$$a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Aktivita

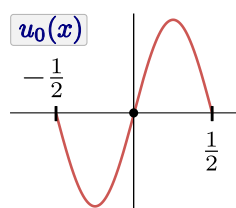
Příklad 9^{1/2}:

$$\square u = 0 \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), t \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{P.P.} \quad u_t(0, x) = \sin(2\pi x) = u_0(x)$$

$$u_t(0, x) = 0 \quad a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{O.P.} \quad u(t, 0) = u\left(t, \frac{1}{2}\right) = 0$$



už je liše prodloužené

$$\Rightarrow u_0(x) = \tilde{u}_{0J}(x)$$

O.P. jsou splněny automaticky

Řešení:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(e^I)(n) c_n e^{-2\pi i n x} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(2\pi k n t) c_n e^{2\pi i n x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \mathcal{F}(\sin(2\pi x)) = \int_{-1/2}^{1/2} \sin(2\pi x) \underbrace{e^{-2\pi i n x}}_{\substack{(\cos 2\pi n x - i \sin 2\pi n x) \\ \text{sudé} \quad \text{liché}}} dx \\ &= \begin{cases} -\frac{i}{2} & n = 1 \\ \frac{i}{2} & n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Neboť $\{\sin(2\pi n x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tvoří ortogonální systém

$$\text{a } \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2(2\pi x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \cos(2\pi k t) \left(-\frac{i}{2} e^{2\pi i x} + \frac{i}{2} e^{-2\pi i x} \right) = \underline{\underline{\cos(2\pi k t) \sin(2\pi x)}}$$

což není nic jiného než $\frac{1}{2} (\sin(2\pi(x+kt)) + \sin(2\pi(x-kt))) \quad \nearrow$

což souvisí s d'Alembertovým vzorcem

Příklad 10:^[zde]

$$\begin{aligned} \square u &= 0 & x \in B_{1/2}(\mathbf{O}) \subset \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^+ \\ \text{P.P.} \quad u(0, x) &= 0 \\ u_t(0, x) &= 1 \\ \text{O.P.} \quad u(t, x) &= 0 & \text{na povrchu koule } |x| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Řešení:

Hledáme radiálně symetrické řešení $v(t, r) = u(t, x)$

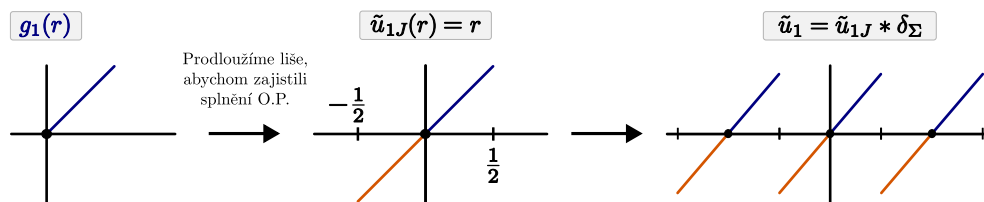
$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) &= 0 & \left/ \begin{array}{l} \cdot r, \underbrace{w := rv}_{\text{substituce}} \\ r \in (0, \frac{1}{2}), t \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= 0 \end{aligned}$$



Nesmíme zapomenout transformovat i podmínky!



$$\begin{aligned} \text{P.P.} \quad w(0, r) &= 0 & \text{převodli jsme problém} \\ w_t(0, r) &= r \cdot 1 = r & \text{na úsečku } (0, \frac{1}{2}) \\ \text{O.P.} \quad w(t, \frac{1}{2}) &= w(t, 0) = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow w(t, r) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(e^{\Pi}) c_n e^{2\pi i n r} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi k n t)}{2\pi k n} c_n e^{2\pi i n r} \\ c_n \int_{-1/2}^{1/2} r e^{-2\pi i n r} dr &\stackrel{\text{Př.5}}{=} -2i \int_0^{1/2} r \sin(2\pi n r) dr \stackrel{\text{výpočet v Př.5}}{=} \dots \\ &= -2i \left(\overbrace{\frac{\sin(2\pi n)}{4\pi^2 n^2}}^{=0} - \overbrace{\frac{\cos(2\pi n)}{2\pi n}}^{=1} \right) \longrightarrow \frac{i}{\pi n} \left[\begin{array}{l} \text{pro } n = 0 \\ c_0 = 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(t, r) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi k n t)}{2\pi k n} \frac{i}{\pi n} (\underbrace{\cos(2\pi n r)}_{\text{sudé}} + i \underbrace{\sin(2\pi n r)}_{\text{liché}}) \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k n t) \sin(2\pi n r)}{\pi^2 n^2 k} \\
 \Rightarrow \quad \underline{\underline{v(r, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k n t) \sin(2\pi n r)}{\pi^2 n^2 k r}}}
 \end{aligned}$$

Jak postupovat pokud jsou data nehomogenní?

Okrajové podmínky mají pak tvar:

$$a) \quad u(t, 0) = A, \quad u\left(t, \frac{1}{2}\right) = B$$

$$b) \quad u_x(t, 0) = A, \quad u_x\left(t, \frac{1}{2}\right) = B$$

$$c) \quad u(t, 0) = A, \quad u_x\left(t, \frac{1}{4}\right) = B$$

$$d) \quad u_x(t, 0) = A, \quad u\left(t, \frac{1}{4}\right) = B$$

Řešení využívá linearitu dif. operátoru $\square$. Řešení hledáme ve tvaru:

$$\underline{u = u_1 + u_2}$$

kde u_1 je co nejjednodušší hladká funkce splňující výše uvedené nehomogenní okrajové podmínky a u_2 je řešení (modifikovaného) problému s homogenními okrajovými podmínkami.

Ad a)

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \text{ hledáme ve tvaru } u_1(x) = \alpha x + \beta \\ \text{Z a) plyne: } \beta = A, \quad \frac{\alpha}{2} + \beta = B \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{u_1(x) = 2(B - A)x + A}$$

Pak u_2 splňuje $u_2 = u - u_1$

$$\begin{aligned}
 &\boxed{\square u_1(x) = \square[2(B - A)x + A]} \\
 &\quad \quad \quad = 0 \\
 \bullet \quad \square u_2 &= \underbrace{\square u}_{=0 \text{ ze zadání}} - \underbrace{\square u_1}_{=0} = 0
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet u_2(0, x) &= \underline{u(0, x) - u_1(x)} \\ \bullet u_2(0, x) &= \underline{u(0, x) - u_1(x)} \\ \bullet u_2(0, x) &= \underline{u(0, x) - u_1(x)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{tuto úlohu můžeme řešit} \\ \text{jako dříve s tím rozdílem} \\ \text{že jsou obě počáteční podmínky} \\ \text{nenulové} \end{array}$$

Ad b)

u_1 hledáme ve tvaru $u_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, resp. $\underline{u_1(x) = \alpha x^2 + \beta x}$
 derivace necítí konstantu

Z **b)** plyne: $\beta = A, \quad \alpha = B - A \quad \Rightarrow \quad \underline{u_1(x) = (B - A)x^2 + Ax}$

Pro u_2 máme:

- $\square u_2 = \overbrace{\square u}^{=0} - \square u_1 = 0 - (-k^2 2(B - A)) = 2k^2(B - A) =: f$
- $u_2(0, x) = u(0, x) - u_1(x)$
- $\frac{\partial u_2}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x)$ 0
- $\frac{\partial u_2}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u_2}{\partial x}\left(t, \frac{1}{2}\right) = 0$

Příklad:^[zde]Řešení vlnové rovnice v kouli (v $\mathbb{R}^3$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \Delta u = 0 \quad \text{v } (0, \infty) \times B_R(\mathbf{O}) \subset \mathbb{R}^3, \quad R = \frac{1}{2}$$

P.P. $u(0, x) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1$$

O.P. $u(t, \frac{1}{2}) = 0$

Řešení:Postupujeme jako v případě [RVT](#):

$$v(t, |x| = r) = u(t, x)$$

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{k^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) = 0 \quad \Bigg/ \cdot r$$

$$\frac{\partial^2(rv)}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} = 0$$

substituce
[$w := rv$]

 $\Rightarrow$

klasická vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0$$

Transformace okrajových podmínek!

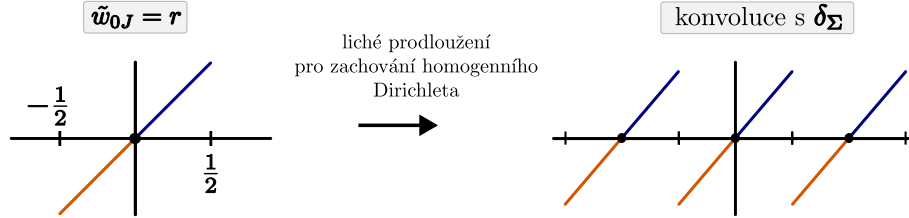
P.P. $w(0, r) = rv(0, r) = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0, r) = r \frac{\partial v}{\partial t}(0, r) = r$$

O.P. $w\left(t, r = \frac{1}{2}\right) = rv(t, r)|_{r=1/2} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

$$w(t, r = 0) = rv(t, r)|_{r=0} = 0$$

Provedeme periodisaci:



$$w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi k|n|t)}{2\pi k|n|} c_n e^{2\pi i n r}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\tilde{w}_{0J}}^r e^{-2\pi i n r} dr \stackrel{PP}{=} \begin{bmatrix} u = r & v' = e^{-2\pi i n r} \\ u' = 1 & v = \frac{e^{-2\pi i n r}}{-2\pi i n} \end{bmatrix} = \\ &= \left[\frac{r e^{-2\pi i n r}}{-2\pi i n} \right]_{-1/2}^{1/2} + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{-2\pi i n r}}{2\pi i n} dr = \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2} e^{-i\pi n} + \frac{1}{2} e^{i\pi n}}{-2\pi i n} \right) + \frac{1}{(4\pi n)^2} \underbrace{\left[e^{-2\pi i n r} \right]_{-1/2}^{1/2}}_{e^{-i\pi n} - e^{i\pi n} = 0} = \\ &= \frac{i}{2\pi n} \cos(\pi n) = \frac{(-1)^n i}{2\pi n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w(t, r) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{\sin(2\pi k|n|t)}{2\pi k|n|}}_{\text{sudé v } n} \underbrace{\frac{(-1)^n i}{2\pi n}}_{\text{liché v } n} \left(\underbrace{\cos(2\pi n r)}_{\text{sudé v } n} + i \underbrace{\sin(2\pi n r)}_{\text{liché v } n} \right) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi k|n|t)}{2\pi k|n|} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n} \sin(2\pi n r) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{\sin(2\pi k n t)}{2k\pi^2 n^2} \sin(2\pi n r) \end{aligned}$$

Resubstitute:

$$\underline{v(t, r)} = \frac{w(t, r)}{r} = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2\pi k n t)}{2k\pi^2 n^2} \frac{\sin(2\pi n r)}{r}}$$

Příklad:

Řešte úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, l)$$

$$\text{P.P.} \quad u(0, x) = x(l - x) \quad \text{na } [0, l]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \quad \text{na } [0, l]$$

$$\text{O.P.} \quad u(t, \tfrac{1}{2}) = u(t, l) = 0 \quad \text{na } [0, T]$$

Řešení:Předpokládáme řešení ve tvaru $u(x, t) = e(x)v(t) = 0$

Po dosazení

$$\begin{aligned} e(x) \ddot{v}(t) - c^2 e''(x) v(t) &= 0 \\ \Rightarrow \underbrace{c^2 \frac{e''(x)}{e(x)}}_{f(x)} &= \underbrace{\frac{\ddot{v}(t)}{v(t)}}_{g(t)} = -\lambda c^2 = \text{konst.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\lambda = \frac{e''(x)}{e(x)} \dots \text{ukážeme, že } \lambda > 0$$

$$\lambda \int_0^l e^2(x) dx = - \int_0^l e(x) e''(x) dx \stackrel{PP}{=} - \left(\underbrace{[e(x) e'(x)]_0^l}_{\substack{0 \\ \text{(z PP)}}} - \int_0^l (e'(x))^2 dx \right) = \int_0^l (e'(x))^2 dx$$

 $\Rightarrow$ pro e nenulové je jediná možnost $\lambda > 0$

$$e'' + \lambda e = 0, \quad \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad e(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

↓ PP

$$0 = e(0) = c_2$$

$$0 = e(l) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l} \Rightarrow \lambda = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$$

↓

$\begin{aligned} e(x) &= c_1 \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \\ v(t) &= d_1 \sin\left(\frac{ck\pi}{l} t\right) + d_2 \cos\left(\frac{ck\pi}{l} t\right) \end{aligned}$	⇔	$\begin{aligned} \ddot{v} + c^2 \lambda v &= 0 \\ \ddot{v} + \left(\frac{ck\pi}{l}\right)^2 v &= 0 \end{aligned}$
--	---	---

Řešení je $\forall k$:

$$u_k(x, t) = \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

Těž součet je řešení, neboť rovnice struny je lineární, tedy

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + \frac{b_k l}{ck\pi} \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$\text{PP-1)} \quad x(l-x) = u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$\text{PP-2)} \quad 0 = \dot{u}(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \Rightarrow \underbrace{b_k \equiv 0}_{\text{neboť } \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \text{ tvoří úplný OG systém}}$$

Z ortogonalit pak plyne:

$$\int_0^l \text{PP-1)} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx$$

$$\int_0^l x(l-x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx = a_k \overbrace{\int_0^l \sin^2\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx}^{l/2}$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l x(l-x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx = \left[\begin{array}{ll} u = x(l-x) & v' = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \\ u' = l-2x & v = -\frac{l}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \end{array} \right]$$

$$= \frac{2}{l} \underbrace{\left[-(x)(l-x) \frac{l}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right]_0^l}_0 + \frac{2}{k\pi} \int_0^l (l-2x) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = l-2x & v' = \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \\ u' = -2 & v = \frac{l}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \end{array} \right] = \frac{2}{k\pi} \left[(l-2x) \frac{l}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right]_0^l =$$

$$= \frac{4l}{(k\pi)^2} \int_0^l \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx = \frac{4l^2}{(k\pi)^3} \left[-\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right]_0^l = \frac{4l^2}{(k\pi)^3} (1 - (-1))$$

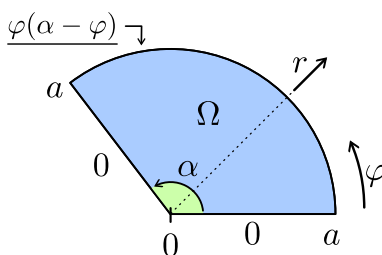
$$\Rightarrow \boxed{u(x, t) = 4l^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{(k\pi)^3} \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)}$$

Příklad:

$$\Omega = \{(r, \varphi), 0 < r < a, 0 < \varphi < \alpha < 2\pi\}$$

Na hranici máme okrajové podmínky (OP):

- $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$ pro $r \in (0, a)$
- $u(a, \varphi) = \varphi(\alpha - \varphi)$ pro $\varphi \in (0, \alpha)$



Využijeme polární souřadnice, kde

$$-\Delta u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (*)$$

$$\text{kde } u = u(r\varphi)$$

Fourierova metoda separace proměnných:

$$u(r, \varphi) = R(r)\phi(\varphi) \quad \text{dosadíme do } (\star)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} R(r) \phi''(\varphi) + \left(\frac{1}{r} \dot{R}(r) + \ddot{R}(r) \right) \phi(\varphi) &= 0 \\ \frac{r^2 \ddot{R}(r) + r \dot{R}(r)}{R(r)} &= - \frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \bullet \dots \text{derivate dle } r \\ \bullet \dots \text{derivate dle } \varphi \end{array}$$



$$\textcircled{1} \quad \phi''(\varphi) + \lambda\phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, \alpha) \quad \textcircled{2} \quad r^2 \ddot{R}(r) + r \dot{R}(r) - \lambda R(r) = 0,$$

$$\phi''(0) = \phi(\varphi) = 0 \quad r \in (0, a)$$

Ad $\textcircled{1}$

$\lambda < 0 \dots \phi = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi} \dots$ OP splní pouze triviální řešení

$$\lambda > 0 \dots \phi = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\varphi)$$

$$0 = \phi(0) = c_2$$

$$0 = \phi(\alpha) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\alpha) \rightarrow \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{\alpha} \Rightarrow \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ je řešení}$$

$$\Rightarrow \phi_n = c_{1,n} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

Ad $\textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ je Eulerova rovnice, kde pro dané $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}$

je ansatz $R(r) = r^m$, dosadíme

$$r^m \left(\underbrace{m(m-1) + m - \lambda_n}_{m^2 - d_n} \right) = 0 \quad m = \pm\sqrt{\lambda_n} = \pm\frac{n\pi}{\alpha}$$

$$\Rightarrow R_n = D_{1,n} r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_{2,n} r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}, \quad \text{položíme } D_{2,n},$$

abychom předešli singularitě pro $r \rightarrow 0_+$

Tedy $u(r, \varphi)$ má obecný tvar

$$\boxed{u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)} \quad \begin{array}{l} \varphi \in (0, \alpha) \\ r \in (0, a) \end{array}$$

Koeficienty b_n určíme z O.P. $u(a, \varphi) = \varphi(\alpha - \varphi)$



$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) = \varphi(\alpha - \varphi) \quad \Bigg/ \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right), \int_0^{\alpha} d\varphi$$

Víme, že $\int_0^\alpha \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi = 0$ pro $|n| \neq |k|$

$\Downarrow$

$$\int_0^\alpha \varphi(\alpha - \varphi) \sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi = b_k a^{\frac{k\pi}{\alpha}} \int_0^\alpha \sin^2\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi$$

$$\bullet \int_0^\alpha \varphi(\alpha - \varphi) \sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi = \frac{2\alpha^3}{k^3\pi^3} (1 - (-1)^k)$$

$$\bullet \int_0^\alpha \sin^2\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

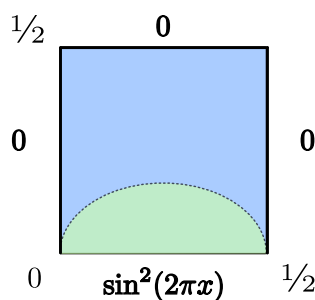
$$\Leftrightarrow b_k = \frac{2\alpha^3}{k^3\pi^3} (1 - (-1)^k) \frac{2}{\alpha a^{\frac{k\pi}{\alpha}}} = \frac{4\alpha^2 (1 - (-1)^k)}{\underline{\underline{k^3\pi^3 a^{\frac{k\pi}{\alpha}}}}}$$

Příklad:

Hledáme řešení $\Delta u = 0$ v $\Omega = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$

- $u(0, y) = u\left(\frac{1}{2}, y\right) = 0$ $y \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
- $u\left(x, \frac{1}{2}\right) = 0$ $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
- $u(x, 0) = \sin^2(2\pi x)$ $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Řešení:



Opět hledáme řešení Fourierovou metodou:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Leftrightarrow X''(x)Y(y) + X(x)\ddot{Y}(y) = 0$$

$\Downarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \dots \text{ derivace dle } x \\ \bullet \dots \text{ derivace dle } y \end{array} \right| - \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{Y}(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{1} \quad X'(x) + \lambda X(x) = 0; \quad x \in (0, \tfrac{1}{2}) \quad \textcircled{2} \quad \ddot{Y}(y) - \lambda Y(y) = 0; \quad y \in (0, \tfrac{1}{2})$$

$$X(0) = 0$$

$$X(\tfrac{1}{2}) = 0$$

Ad $\textcircled{1}$

$$\lambda > 0: \quad \underline{X_n = C_{1,n} \sin(\sqrt{\lambda_n} x)}, \quad \lambda_n = 4\pi^2 n^2$$

Ad $\textcircled{2}$

$$\begin{aligned} Y_n'' - \lambda_n Y_n &= 0 & \Rightarrow & \quad Y_n = b_n e^{\sqrt{\lambda_n} y} + c_n e^{-\sqrt{\lambda_n} y} = b_n e^{2\pi n y} + c_n e^{-2\pi n y} \\ Y_n(\tfrac{1}{2}) &= 0 & \Rightarrow & \quad 0 = Y_n(\tfrac{1}{2}) = b_n e^{\pi n} + c_n e^{-\pi n} \quad \Rightarrow \quad \underline{c_n = -b_n e^{2\pi n}} \\ & & \Rightarrow & \quad \underline{Y_n = b_n (e^{2\pi n y} - e^{2\pi n(1-y)})} \end{aligned}$$

Tedy řešení je ve tvaru

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{2\pi n y} - e^{2\pi n(1-y)}) \sin(2\pi n x)$$

$$b_n \text{ určíme z OP} \quad u(x, 0) = \sin^2(2\pi x)$$

$$\sin^2(2\pi x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (1 - e^{2\pi n}) \sin(2\pi n x) \quad \Bigg/ \cdot \sin(2\pi k x), \int_0^{1/2} dx$$

$$\text{opět} \quad \int_0^{1/2} \sin(2\pi n x) \sin(2\pi k x) dx = 0 \quad k \neq n$$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} \sin^2(2\pi x) \sin(2\pi k x) dx = b_k (1 - e^{2\pi k}) \int_0^{1/2} \sin^2(2\pi k x) dx$$

$$\bullet \int_0^{1/2} \sin^2(2\pi k x) dx = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \int_0^{1/2} \sin^2(2\pi x) \sin(2\pi k x) dx = \int_0^{1/2} \frac{1 - \cos(4\pi x)}{2} \sin(2\pi k x) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2\pi k} \cos(2\pi k x) \right]_0^{1/2} - \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \underbrace{\cos(4\pi x) \sin(2\pi k x)}_{\frac{1}{2} (\sin(2\pi(k+2)x) + \sin(2\pi(k-2)x))} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi k} (1 - (-1)^k) + \frac{1}{4} \left(\left[\frac{\cos(2\pi(k+2)x)}{2\pi(k+2)} \right]_0^{1/2} + \left[\frac{\cos(2\pi(k-2)x)}{2\pi(k-2)} \right]_0^{1/2} \right) = \\
&= \frac{1}{4\pi k} (1 - (-1)^k) + \frac{1}{8\pi} \underbrace{\left(\frac{\cos(k\pi - 1)}{k+2} + \frac{\cos(k\pi - 1)}{k-2} \right)}_{\frac{2k((-1)^k - 1)}{k^2 - 4}} = \\
&= \frac{1}{4\pi k} (1 - (-1)^k) + \frac{1}{4\pi} \frac{k((-1)^k - 1)}{k^2 - 4}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b_k = \frac{1}{(1 - e^{2k\pi})\pi} \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{k^2 - 4} \right) (1 - (-1)^k)}}$$

Obecná Dirichletova úloha na ■

Ukážeme si, jak řešit obecnou Dirichletovu úlohu na čtverci.

- 1) Každý čtverec lze posunout do $(0,0)$.
- 2) Změnou měřítka, které zachovává $\Delta u = 0$, převést úlohu na čtverec o straně $1/2$.

$\Rightarrow$ Uvažujeme úlohu

$$\Delta u = 0 \quad \text{v} \quad \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)}_{\Omega} \quad \text{s} \quad u = u_D \text{ na } \partial\Omega$$

kde $u_D \in C(\partial\Omega)$.

Jako dříve, hledejme řešení ve tvaru $u = \underbrace{u_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{co nejjednodušší} \\ \text{řešící } u_1 = u_D \text{ na } \partial\Omega}} + v$

- 1) $u_1(x, y) = Axy + Bx + Cy + D \dots$ harmonické ($\Delta u_1 = 0$) splňující

$$\begin{aligned} u_1(0,0) &= u_D(0,0), & u_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= u_D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ u_1\left(0, \frac{1}{2}\right) &= u_D\left(0, \frac{1}{2}\right), & u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= u_D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad \dots \text{chytneme v rozích} \\ &&& \text{4 rovnice pro A,B,C,D}$$

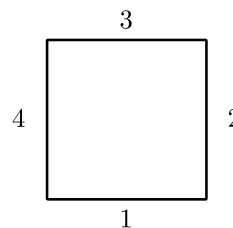
- 2) Pak v řeší $\Delta v = 0 \quad \text{v} \quad \Omega \quad v = u_D - u_1 \text{ na } \partial\Omega$

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &u_D - u_1 = 0 \quad \text{v rozích čtverce} \end{aligned}$$

Hledáme v ve tvaru $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$,

kde v_i řeší $\Delta v_i = 0 \quad \text{v} \quad \Omega$

a $v_i = u_D - u_1$ na i -té straně čtverce a na ostatních je nulové ($v_i = 0$)



Nyní každé v_i hledáme jako v [předchozím](#) příkladě, kde byla též na třech stranách tři nulová Dirichletova data.

Příklad:

Najděte fundamentální řešení Helmholtzova operátoru $-\Delta + k^2$ ve třech dimenzích. Tj. hledáme u tak, že

$$(-\Delta + k^2)u = \delta \quad \text{v } \mathbb{R}^3 \quad (\clubsuit)$$

Řešení:

Řešíme dvěma postupy:

- Ⓐ Tvar operátoru a tvar pravé strany vybízí k hledání sféricky **symetrického řešení**, tj. hledáme u ve tvaru

$$u(x) = v(|x|), \quad |x| = r$$

Po dosazení do $(\clubsuit)$ pro $r \neq 0$ máme

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(v'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right) + k^2 v(|x|) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{x_i}{|x|}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$$

$$0 = -v''(|x|) - \frac{3v'(|x|)}{|x|} + \frac{v'(|x|)x_i}{|x|^2} \frac{x_i}{|x|} + k^2 v(|x|) \quad / \quad |x| = r, \quad \cdot r$$

$$0 = \underbrace{rv'' + 2v'}_{(rv)''} - k^2 rv \quad \Rightarrow \quad (rv)'' = k^2(rv)$$

$$rv = C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}, \quad C_2 = 0$$

aby funkce nešla

do $+\infty$ pro $r \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \quad v(r) = \frac{C_1 e^{-kr}}{r} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{C_1 e^{-k|x|}}{|x|} \dots \text{řeší } (-\Delta + k^2)u = 0$$

$$\text{v } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

Zbývá určit konstantu C_1 . Protože $\frac{1}{4\pi|x|}$ splňuje $-\Delta \left(\frac{1}{4\pi|x|} \right) = \delta_0$ v $\mathbb{R}^3$,

tak vidíme, že $\underbrace{(-\Delta + k^2) \frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}} = \delta_0$ v $\mathbb{R}^3$.

- (B) Nalezení fundamentálního řešení pomocí Fourierovy transformace. Aplikujeme F.T. na $(-\Delta + k^2)u = \delta$ a dostaneme

$$(4\pi^2|\xi|^2 + k^2)\hat{\mu}(\xi) = 1 \Rightarrow \hat{\mu}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2|\xi|^2 + k^2} \dots \text{radiální funkce}$$

pro kterou platí (Černý Pokorný: Matematika pro fyziky IV)

$$\text{v } \mathbb{R}^3: F^{-1}[f(\xi)](x) = \frac{2}{|x|} \int_0^\infty f(r) \sin(2\pi r|x|) r \, dr$$

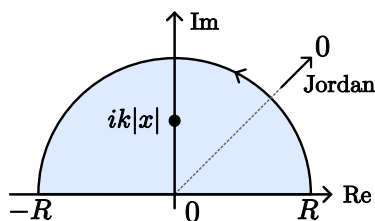
$$\Rightarrow F^{-1}\left(\frac{1}{4\pi^2|\xi|^2 + k^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{|x|} \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi r|x|) r}{4\pi^2 r^2 + k^2} dr = \left[\begin{array}{l} t = 2\pi|x|r \\ dt = 2\pi|x| \, dr \end{array} \right]$$

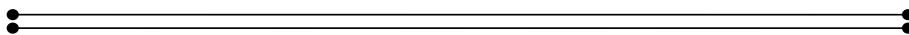
$$= \frac{1}{\pi|x|^2} \int_0^\infty \frac{\sin(t) t}{2\pi|x| \left(\frac{t^2}{|x|^2} + k^2\right)} dt = \frac{1}{2\pi^2|x|} \int_0^\infty \frac{t \sin(t)}{t^2 + k^2|x|^2} dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2|x|} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{t e^{it} dt}{(t + ik|x|)(t - ik|x|)} = (\heartsuit) \quad \dots \text{řešíme residuovou větou}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{t e^{it} dt}{(t + ik|x|)(t - ik|x|)} &= \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{ik|x|} \frac{z e^{iz}}{z^2 + k^2|x|^2} = \\ &= 2\pi i \frac{ik|x| e^{-k|x|}}{2ik|x|} = \frac{i\pi e^{-k|x|}}{4\pi|x|} \end{aligned}$$



$$(\heartsuit) = \frac{1}{4\pi^2|x|} \pi e^{-k|x|} = \frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$$



Dodatky

Poissonova sumační formule

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_{\Sigma}) = \delta_{\Sigma}} \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

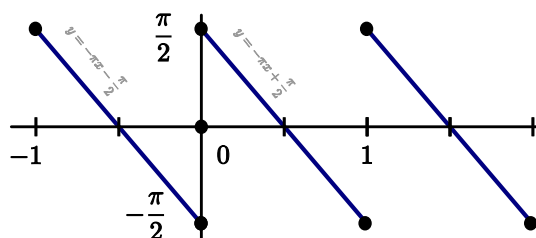
vzorkovací distribuce: $\delta_{\Sigma} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(x-n)$

$$\Leftrightarrow \text{platí neboť } \mathcal{F}(\delta_{\Sigma}) = \delta_{\Sigma} \Leftrightarrow \langle \mathcal{F}(\delta_{\Sigma}), \varphi \rangle = \langle \delta_{\Sigma}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\varphi)(n) = \langle \delta_{\Sigma}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)$$

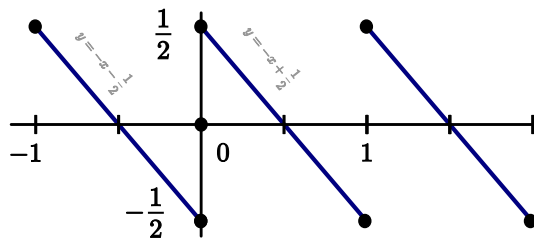
Odvodíme si platnost Poissonovy sumační formule

- na intervalu $(0, 1)$ platí $f = \pi \left(\frac{1}{2} - x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}$



(klasická Fourierova řada)

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle T_f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f \varphi \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi nx)}{n} \varphi \, dx = \\ \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} 2\pi \sum_{n=1}^N \cos(2\pi nx) \varphi(x) \, dx &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi nx)}{n} \varphi' \, dx = \\ &= - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f \varphi' \, dx = -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2} - x \right) \varphi' \, dx = \\ \text{PP} &= -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left[\left(\frac{1}{2} - x \right) \varphi \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} (-1) \varphi \, dx \right) \, dx = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{2} \varphi(n-1) - \frac{1}{2} \varphi(n) \right) + \int_n^{n+1} \varphi(x) dx \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n+1) + \varphi(n) - \pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \\
 &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) - \pi \langle T_1, \varphi \rangle = \pi (\langle \delta_{\Sigma}, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \lim_{N \rightarrow \infty} T_{\sum_{n=1}^N \cos(2\pi n x)} = \delta_{\Sigma} - T_1 \quad \forall \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

$$\text{dále } \lim_{N \rightarrow \infty} T_{\sum_{-N}^N e^{-2\pi i n x}} = \lim_{N \rightarrow \infty} T_{\sum_{-N}^N \cos(2\pi n x) - i \sin(2\pi n x)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \text{\textcolor{blue}{členy se sinem}} \\ \text{\textcolor{blue}{vypadnou kvůli lichosti}} \end{array} \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} T_{\sum_{-N}^N \cos(2\pi n x)} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} T_{2 \sum_{n=1}^N \cos(2\pi n x) + T_1} = \delta_{\Sigma}$$

$$\text{Nakonec: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T_{e^{-2\pi n x}}, \varphi \rangle = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_n(x), \varphi \rangle}_{\langle \delta_{\Sigma_1} \varphi \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)$$

Příklady na RVT

Příklad 1a):

Řešte RVT s počáteční podmínkou $g(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 \cos(\vec{\beta}, \vec{x})$.

Řešení:

Najdeme řešení $\tilde{u}$ s poč. podmínkou $\tilde{g}(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 e^{i\vec{\beta} \cdot \vec{x}}$ a výpočtu $\tilde{u}$ získáme původní řešení $u = \text{Re}(\tilde{u})$.

Chceme spočítat $\tilde{u} = e * \tilde{g} \quad / \quad \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{u}) &= \mathcal{F}(e) \cdot \mathcal{F}(\tilde{g}) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \mathcal{F}(|\vec{x}|^2) * \mathcal{F}(e^{i\vec{\beta} \cdot \vec{x}}) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \Delta \delta * \delta_{\frac{\beta}{2\pi}} \end{aligned}$$

Počítejme:

$$\begin{aligned} &\left\langle e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \left(\Delta \delta * \delta_{\frac{\beta}{2\pi}} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle \Delta \delta * \delta_{\frac{\beta}{2\pi}}, e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \varphi \right\rangle = \left\langle \delta_{\frac{\beta}{2\pi}}, \left\langle \Delta \delta, e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \varphi \right\rangle \right\rangle = \\ &= \left\langle \delta_{\frac{\beta}{2\pi}}(x), \left\langle \Delta_y \delta(y), e^{-4\pi^2|x+y|^2 t} \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle = \text{rozderivujeme} = \\ &= \left\langle \delta_{\frac{\beta}{2\pi}}(x), \left\langle \delta(y), e^{-4\pi^2|x+y|^2 t} \left(\Delta \varphi - 16\pi^2 t ((x+y) \cdot \nabla \varphi) + (8\pi^2 t (x+y)^2 - 8\pi^2 N t) \varphi(x+y) \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \delta_{\frac{\beta}{2\pi}}(x), e^{-4\pi^2|x|^2 t} \left(\Delta \varphi - 16\pi^2 t \vec{x} \cdot \nabla \varphi + ((8\pi^2 t x)^2 - 8\pi^2 N t) \varphi(x) \right) \right\rangle \\ &= e^{-|\beta|^2 t} \left[\Delta \varphi(b) + 8\pi t \sum_{k=1}^N -\beta_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right) + \varphi \left(\frac{\beta}{2\pi} \right) ((4\pi t \beta)^2 - 8\pi^2 N t) \right] \\ &= \left\langle e^{-|\beta|^2 t} \left\{ \Delta \delta + 8\pi t \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial \delta}{\partial x_k} + ((4\pi t \beta)^2 - 8\pi^2 N t) \delta \right\} * \delta_{\frac{\beta}{2\pi}}, \varphi(x) \right\rangle \\ &\Rightarrow \tilde{u} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{u})) = \frac{-1}{4\pi^2} e^{-|\beta|^2 t} \mathcal{F}^{-1}(\{\dots\}) \cdot \mathcal{F}^{-1} \left(\delta_{\frac{\beta}{2\pi}} \right) \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} e^{-|\beta|^2 t} e^{i\vec{\beta} \cdot \vec{x}} \left(-4\pi^2 |\vec{x}|^2 - 16\pi^2 i t \vec{\beta} \cdot \vec{x} + (4\pi t \beta)^2 - 8\pi^2 N t \right) \\ &u = \text{Re}(\tilde{u}) = e^{-|\beta|^2 t} \left((|\vec{x}|^2 - 4t|\vec{\beta}|^2 + 2Nt) \cos(\vec{\beta} \cdot \vec{x}) - 4t\vec{\beta} \cdot \vec{x} \sin(\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \right) \end{aligned}$$

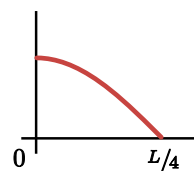
Příklad 3:

Řešte v $\mathbb{R}^+ \times (0, \frac{L}{4})$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

P.P. $u(0, x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \delta_a \quad a \in (0, \frac{L}{4})$

O.P. $u_x(d, 0) = u(d, \frac{L}{4}) = 0$



Řešení:

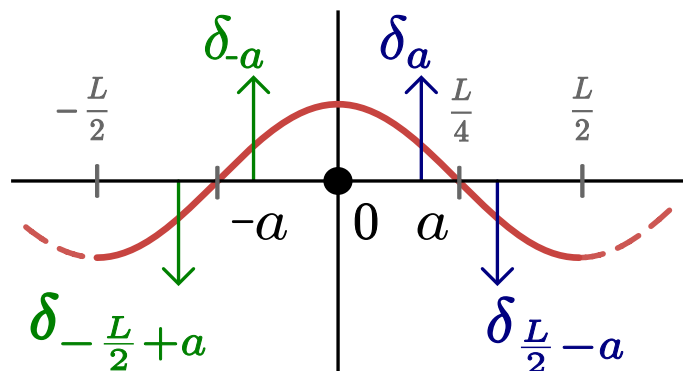
Splnění OP zajistíme prodloužením PP

- nejprve **liše** vzhledem k $\frac{L}{4}$
- poté **sudě** vzhledem k 0
- a provedeme periodisaci $\Rightarrow$ dostáváme úlohu v $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

(P.P.) $\hat{u}(0, x) = g_J * \delta_{\Sigma, L}$ kde g_J definovaná na $(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ odpovídá
 licho-sudému prodloužení

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}}^{\text{u def.}} \delta_{K \cdot L}$$

$$g_J = \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}_{\text{už má požadovanou symetrii}} + \delta_a - \delta_{\frac{L}{2}-a} + \delta_{-a} - \delta_{-\frac{L}{2}+a}$$



Z theorie víme, že řešení lze nalézt ve tvaru řady

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-4\pi^2 n^2 d}{L^2}} e^{\frac{2\pi i n x}{L}} c_n$$

kde c_n jsou Fourierovy koeficienty prodloužené P.P. g_J

Tedy

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} g_J(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} dx = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} dx + \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\delta_a - \delta_{\frac{L}{2}-a} + \delta_{-a} - \delta_{-\frac{L}{2}+a}\right) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} dx = \\ &= \frac{1}{L} \underbrace{(\underbrace{\delta_{n1} + \delta_{n-1}}_{\text{Kroneckerovo delta}}) \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx}_{= L/2} + \frac{1}{L} \left(e^{\frac{-2\pi i n a}{L}} + e^{\frac{2\pi i n a}{L}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{L} \left\{ e^{\frac{2\pi i n a}{L}} e^{i\pi n} + e^{\frac{-2\pi i n a}{L}} e^{-i\pi n} \right\} = \\ &= \frac{\delta_{n\pm 1}}{L} \frac{L}{2} + \cos\left(\frac{2\pi n a}{L}\right) \frac{2}{L} - (-1)^n \frac{2}{L} \cos\left(\frac{2\pi n a}{L}\right) = \\ &= \frac{\delta_{n\pm 1}}{2} + \frac{2}{L} \cos\left(\frac{2\pi n a}{L}\right) (1 - (-1)^n) \quad \dots \text{ sudé vzhledem k } n \text{ (a 0 pro } n \text{ sudé)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad u(d, x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-4\pi^2 n^2 d}{L^2}} e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \cdot c_n = \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{-4\pi^2 d}{L^2}} \left(e^{\frac{2\pi i x}{L}} - e^{\frac{-2\pi i x}{L}} \right) \\ &\quad + \frac{2}{L} 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-4\pi^2 n^2 d}{L^2}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi n a}{L}\right) (1 - (-1)^n) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$u(d, x) = e^{\frac{-4\pi^2 d}{L^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{8}{L} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-4\pi^2 (2k-1)^2 d}{L^2}} \cos\left(\frac{2\pi (2k-1)x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi (2k-1)a}{L}\right)$$

Příklad 6:

Nalezněte jedno řešení [RVT](#)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta(x) \otimes e^{pt} \quad \text{v } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \quad p > 0$$

Řešení:

- Šlo by řešit konvolucí s fundamentálním řešením u_F

$$u_F = \begin{cases} \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^N e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} & t > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= u_F \underset{(x,t)}{*} (\delta(x) \otimes e^{pt}) = u_F \underset{(t)}{*} e^{pt} = \left(\begin{array}{c} N = 3 \\ a = 1 \end{array} \right) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}} e^{p(t-\tau)} d\tau = e^{pt} \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}} e^{-p\tau} d\tau \end{aligned}$$

Není zřejmé, jak dopočítat integrál, zkusíme to jinak. (případná aktivita)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta(x) \otimes e^{pt} \quad \Bigg/ \quad \mathcal{F} \text{ v } x$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} = e^{pt} \quad \Bigg/ \quad \cdot e^{4\pi^2 |\xi|^2 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{u} e^{4\pi^2 |\xi|^2 t} \right) = e^{t(p+4\pi^2 |\xi|^2)}$$

$$\hat{u} = e^{4\pi^2 |\xi|^2 t} \frac{e^{t(p+4\pi^2 |\xi|^2)}}{p+4\pi^2 |\xi|^2} = \frac{e^{pt}}{p+4\pi^2 |\xi|^2} \quad \dots \text{radiální fce}$$

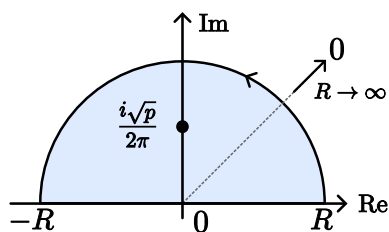
$$u(r, t) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\frac{e^{pt}}{p+4\pi^2 |\xi|^2} \right) = e^{pt} F_\xi^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{p^2 + (2\pi|\xi|)^2}} \right) = (\bigcirc)$$

Pro 3D víme, jak vypadá F.T. radiálně symetrické funkce (a inverse taky, když je ta fce reálná)

$$\mathcal{F}^{-1}(R(r))(\varrho) = \frac{2}{\varrho} \int_0^\infty R(r) r \sin(2\pi r \varrho) dr$$

Tedy

$$\begin{aligned}
 (\text{O}) &= e^{pt} \overbrace{\frac{2}{\varrho} \int_0^\infty}^{\text{sudé v } r} \frac{r \sin(2\pi r \varrho)}{\sqrt{p^2 + (2\pi|\xi|)^2}} dr = \\
 &= \frac{e^{pt}}{4\pi^2 \varrho} \int_{-\infty}^\infty \frac{r \sin(2\pi r \varrho)}{\left(r + i \frac{\sqrt{p}}{2\pi}\right) \left(r - i \frac{\sqrt{p}}{2\pi}\right)} dr = \\
 &= \frac{e^{pt}}{4\pi^2 \varrho} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{r e^{2\pi i z \varrho}}{\left(r + i \frac{\sqrt{p}}{2\pi}\right) \left(r - i \frac{\sqrt{p}}{2\pi}\right)} dr =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{reziduová věta} &= \frac{e^{pt}}{4\pi^2 \varrho} \operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname{Res}_{i \frac{\sqrt{p}}{2\pi}} \frac{z e^{2\pi i z \varrho}}{\left(z + i \frac{\sqrt{p}}{2\pi}\right) \left(z - i \frac{\sqrt{p}}{2\pi}\right)} \right) \\
 &= \frac{e^{pt}}{4\pi^2 \varrho} \operatorname{Im} \left(2\pi i \frac{i \frac{\sqrt{p}}{2\pi} e^{-\sqrt{p} \varrho}}{2 i \frac{\sqrt{p}}{2\pi}} \right) = \frac{e^{pt}}{4\pi \varrho} e^{-\sqrt{p} \varrho} = \frac{e^{pt - \sqrt{p}|x|}}{4\pi|x|}
 \end{aligned}$$

+ předpoklady věty o F.T. radiálně symetrické funkce

dělali jsme v příkladu $\mathcal{F} \left(\frac{1}{c + 4\pi^2 |x|^2} \right) = \frac{e^{-c|\xi|}}{4\pi|\xi|}$.