

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA D

LUBOŠ PICK

Příklad D1. Vyšetřete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)}{n+1} (2x+1)^n.$$

(10 bodů)

Příklad D2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+4)} dx$$

na všech intervalech, na kterých existuje.

(10 bodů)

Příklad D3. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje Newtonův integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{(\min\{\operatorname{arccotg}(x), \operatorname{arctg}(x)\})^\alpha}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx.$$

(10 bodů)

Příklad D4. Uvažujte funkci $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovanou předpisem

$$F(x, y) = (\operatorname{sign}(2x+y)\sqrt{5x^2+2y^2}, (1-\cos(x+y))(|x|+3|y|)) \quad \text{pro } [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Rozhodněte, zda existuje $F'(2, 2)$ a pokud ano, spočtěte ji.
- (b) Rozhodněte, zda existuje $F'_2(0, 0)$ a pokud ano, spočtěte ji.
- (c) Rozhodněte, zda existuje $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0, 0)$, a pokud ano, spočtěte ji.

(10 bodů)

Příklad D5. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku nebo protipříkladem na jeho platnost.

- (a) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}a_n$ konverguje.
- (b) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ absolutně konverguje.
- (c) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n})$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(10 bodů)

$$\boxed{D_1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)}{n+1} (2x+1)^n$$

Rěšen! Označ a_n n -tý člen řady.

Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$.

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Potom pro $n \geq n_0$ platí

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2\sqrt{n}}} \leq \sqrt[n]{\frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)}{n+1}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} \quad *$$

Odtud a z VOZS plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)}{n+1}} = 1,$$

neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

- Je-li $|2x+1| < 1$, potom dle (*) a VOAL platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |2x+1| \cdot \sqrt[n]{\frac{n}{n+1} \cdot (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)},$$

a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |2x+1| < 1$.

Dle Cauchyova kritéria tedy $\sum a_n$ AK.

- Je-li $|2x+1| > 1$, potom obdobně dostaneme

lim $\sqrt[m]{|a_n|} > 1$, a tedy lim $a_n \neq 0$.

Protože není splněna nutná podmínka konvergence, $\sum a_n \mathcal{D}$.

• Je-li $x = -1$, potom $\sum a_n = \sum (-1)^n (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1) \frac{n}{n+1}$.

Označ $b_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1$, $c_n = \frac{n}{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Protože b_n je klesající a lim $b_n = 0$, plyne

z Leibnizovy věty, že $\sum (-1)^n b_n \mathcal{K}$.

Protože c_n je rostoucí ($c_n = 1 - \frac{1}{n+1}$) a omezená

($\frac{1}{2} \leq c_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$), plyne z Abelova kritéria,

že $\sum a_n (= \sum (-1)^n b_n c_n) \mathcal{K}$.

• Je-li $x = 0$, potom $\sum a_n = \sum \frac{n}{n+1} (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)$,

což je řada s hladkými členy splňujícími

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$$

Protože $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{D}$, plyne z SK, že $\sum a_n \mathcal{D}$.

Shrnutí: $\sum a_n \mathcal{AK} \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$

$\sum a_n \mathcal{K} \Leftrightarrow x \in [-1, 0)$.

Hodnotcevní:

srovnávací s $\frac{1}{\sqrt{2}}$ --- 2 body

$|2x+1| < 1$ --- 1 bod

$|2x+1| > 1$ --- 2 body

$x = -1$ --- 3 body

$x = 0$ --- 2 body

D2 Prim. fci

$$I = \int \frac{x+1}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+4)} dx$$

Řešení! Funkce v integrandu je definována pro

$$x \in (0,1) \cup (1,\infty),$$

prim. fci tedy hledáme na nějakých

podintervalech intervalů $(0,1)$ a $(1,\infty)$.

Provedeme substituci $y = \sqrt{x}$, pak

$$x = y^2, \quad dx = 2y dy, \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & \infty \\ \hline y & 1 & \infty \end{array}$$

$$\text{Označ } J = \int \frac{(y^2+1)2y}{(y^2-y)(y^2+y+4)} dy$$

$$= 2 \int \frac{y^2+1}{(y-1)(y^2+y+4)} dy.$$

Rozložíme integrand na parciální zlomky

$$\frac{y^2+1}{(y-1)(y^2+y+4)} = \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{y^2+y+4},$$

tedy

$$y^2+1 = A(y^2+y+4) + (By+C)(y-1).$$

Pro $y=1$ dostáváme

$$2 = 6A, \text{ tedy } A = \frac{1}{3}.$$

Pro $y=0$ dostáváme

$$1 = \frac{4}{3} - C, \text{ tedy } C = \frac{1}{3}.$$

Pro $y=2$ dostáváme

$$5 = \frac{1}{3} \cdot 10 + 2B + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} + 2B,$$

$$\text{tedy } 2B = \frac{4}{3}, \quad B = \frac{2}{3}.$$

Takže

$$J = \frac{2}{3} \int \frac{dy}{y-1} + \frac{2}{3} \int \frac{2y+1}{y^2+y+4} dy$$

$$\stackrel{c}{=} \frac{2}{3} \log |y-1| + \frac{2}{3} \log (y^2+y+4), \quad y \in (0,1), \\ \text{nebo } y \in (1,\infty).$$

Dle druhé metody o substituci platí

$$I \stackrel{c}{=} \frac{2}{3} \log |\sqrt{x}-1| + \frac{2}{3} \log (x+\sqrt{x}+4), \quad x \in (0,1), \\ \text{nebo } x \in (1,\infty),$$

kde jsme položili

$$\varphi(y) = y^2, \quad y \in \begin{cases} (0,1) \\ (1,\infty) \end{cases},$$

pak $\varphi((0,1)) = (0,1)$, $\varphi((1,\infty)) = (1,\infty)$,

$\varphi'(y) = 2y$ vlastně neuvolová!

$\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Hodnocení:

def. obor integrandu	1
substituce $y = \sqrt{x}$	1
rozklad na složky	3
vypočet integrálu	3
závěr	2

D3 konvergence integrálu pro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\min\{\operatorname{arccot}_g(x), \operatorname{arct}_g(x)\})^\alpha}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

Řešení! Funkce v integrandu je kladná

a spojitá na $(0, \infty)$, označme ji $f_\alpha(x)$.

Funkce arccot_g je klesající na $(0, \infty)$, funkce arct_g je rostoucí na $(0, \infty)$ a platí

$$\operatorname{arccot}_g 1 = \operatorname{arct}_g 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Tedy

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{arct}_g x)^\alpha}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} & \text{pro } x \in (0, 1], \\ \frac{(\operatorname{arccot}_g x)^\alpha}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} & \text{pro } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Označ $g_\alpha(x) = x^{\alpha - \frac{1}{3}}$, $x \in (0, 1]$.

Potom g_α je kladná a spojitá na $(0, 1]$,

$$\int_0^1 g_\alpha < \infty \Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{3} > -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha > -\frac{2}{3},$$

$$a \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{g_\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^\alpha \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{6}} + 1} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1.$$

Dle LSK tedy $\int_0^1 f_\alpha < \infty \Leftrightarrow \alpha > -\frac{2}{3}$.

Označ $h_\alpha(x) = x^{-\alpha - \frac{1}{2}}$, $\alpha \in [1, \infty)$. Potom

h_α je kladná a spojitá na $[1, \infty)$,

$$\int_1^\infty h_\alpha < \infty \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{2} < -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2},$$

$$a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha(x)}{h_\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \operatorname{arccotg} x)^\alpha \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \operatorname{arccotg} x)^\alpha \cdot \frac{1}{1 + x^{-\frac{1}{6}}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1.$$

Dle LSK tedy $\int_1^\infty f_\alpha < \infty \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

Závěr: $\int_0^\infty f_\alpha < \infty \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$,

neboť f_α je spojitá a bodě 1.

<u>Hodnocení</u>	zpracování integrandu ...	1 bod
	konvergence u 0 ...	4 body
	konvergence u ∞ ...	4 body
	Závěr ...	1 bod

$$\boxed{D4} \quad F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$F(x,y) = \left(\operatorname{sign}(2x+y) \sqrt{5x^2+2y^2}, (1-\cos(x+y))(|x|+3|y|) \right)$$

$$(a) F'(2,2), \quad (b) F'_2(0,0), \quad (c) \frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0)$$

Řešení (a) Najdu $\delta > 0$ splývající $\forall [x,y] \in B([2,2], \delta)$:

$$F(x,y) = \left(\sqrt{5x^2+2y^2}, (1-\cos(x+y))(x+3y) \right)$$

(například $\delta=2$ nebo jábčli $\delta \in (0,2)$).

Tedy F má spajité parciální derivace na

$B([2,2], \delta)$, takže $F'(2,2)$ existuje a je pro

každé $[x,y] \in B([2,2], \delta)$ reprezentována maticí

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{5x}{\sqrt{5x^2+2y^2}} & \frac{2y}{\sqrt{5x^2+2y^2}} \\ \sin(x+y)(x+3y) + (1-\cos(x+y)) & \sin(x+y)(x+3y) + 3(1-\cos(x+y)) \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$F'(2,2) = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{28}} & \frac{4}{\sqrt{28}} \\ 8 \sin 4 + 1 - \cos 4 & 8 \sin 4 + 3 - 3 \cos 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ 8 \sin 4 + 1 - \cos 4 & 8 \sin 4 + 3 - 3 \cos 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Płach'

$$F_2(x, y) = (1 - \cos(x+y)) (|x| + 3|y|), \quad \text{tedy}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_2(h,0) - F_2(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h) |h|}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_2(0,h) - F_2(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h) 3|h|}{h} = 0.$$

Tedy $\nabla F_2(0,0) = (0,0)$ a kandydatem na $F_2'(0,0)$ je nulove' zobrazen'. Jest

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{|F_2(x,y) - F_2(0,0) - 0|}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{(1 - \cos(x+y)) (|x| + 3|y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Płach'

$$0 \leq (1 - \cos(x+y)) \frac{|x| + 3|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 3\sqrt{2} (1 - \cos(x+y)),$$

neboť $|x| + 3|y| \leq 3(|x| + |y|) \leq 3\sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}$.

Tedy

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{|F_2(x,y) - F_2(0,0) - 0|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Odtud plyne, že $F_2'(0,0) = 0$.

(c) Příklad

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_1(h,0) - F_1(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sign}(2h) \sqrt{5}h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{5} \cdot \frac{|h|}{h} \cdot \text{sign}(2h) = \sqrt{5}.$$

Hodnočení:

(a) existence $F'(2,2)$...	1
$F'(x,y)$ na $B([2,2], \delta)$...	1
$F'(2,2)$...	1
(b) $\nabla F_2(0,0)$	---	1
$F_2'(0,0)$	---	4
(c) $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0)$	---	2

$$\boxed{D5} \quad (a) \quad \sum a_n \text{ K} \Rightarrow \sum \sqrt{n} a_n \text{ K}$$

$$(b) \quad \lim n^2 a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ AK}$$

$$(c) \quad \left(\sum a_{3n-1} + a_{3n} \right) \text{ K} \Rightarrow \sum a_n \text{ K}$$

Řešení! (a) NEPLATÍ! polož $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

potom $\sum a_n \text{ K}$ dle Leibnize, ale

$$\sum \sqrt{n} a_n = \sum (-1)^n \text{ D}, \text{ neboť nesplňuje}$$

nutnou podmínku.

(b) PLATÍ! důkaz: víme, že $|a_n| = |(-1)^n a_n|$

$$\text{a také } n^2 a_n \rightarrow 0 \Rightarrow n^2 |a_n| \rightarrow 0.$$

Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$:

$$n^2 |a_n| \leq 1, \text{ tj. } |a_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Že SK a $\sum \frac{1}{n^2} \text{ K}$ plyne, že $\sum |a_n| \text{ K}$,

a tedy $\sum (-1)^n a_n \text{ AK}$.

(c) NEPLATÍ! polož $a_n = (0, 1, -1, 0, 1, -1, \dots)$.

Hodnození,

- (a) ... 2 body
- (b) -- 5 bodů
- (c) ... 3 body