Výpočty v 2. ročníku ZS (anna-lýza 3)

Iosephus Kučeravý, Lukáš Krump

Obsah

1 Variační počet

1.1 Gâteauxův diferenciál

Gâteauxův diferenciál funkcionálu Φ v bodě a a směru $\vec{h}$:

$$\partial\Phi(a,\vec{h}) \;:=\; \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(a+t\vec{h})-\Phi(a)}{t} \;=\; \frac{d}{dt}\Phi(a+t\vec{h})\;\Big|_{t=0}$$

$$\text{kde } X = \text{normovaný lineární prostor}, \quad \Phi : X \to \mathbb{R} \text{ funkcionál},$$

$$a \in D_{\Phi\subset X} \text{ pevně zvolený bod funkce}, \quad \vec{h}\in X \text{ směr}, \quad t\in\mathbb{R}$$

2. Gâteauxův diferenciál stejného směru funkcionálu Φ v bodě a a směru $\vec{h}$:

2. derivace ve stejném směru $\vec{h}$:

$$\partial^2\Phi(a,\vec{h},\vec{h}) \;:=\; \lim_{t\to 0}\frac{\partial\Phi(a+t\vec{h},\vec{h})-\partial\Phi(a,\vec{h})}{t}$$

2. Gâteauxův diferenciál dalšího směru funkcionálu Φ v bodě a a směrech $\vec{h}$ a $\vec{k}$:

Nechť je navíc dán další směr $\vec{k}$:

$$\partial^2\Phi(a,\vec{h},\vec{k}) \;:=\; \lim_{t\to 0}\frac{\partial\Phi(a+t\vec{k},\vec{h})-\partial\Phi(a,\vec{h})}{t}$$

Početní trick: Gâteauxův diferenciál z hlavy

Pokud to dokážeme, můžeme psát diferenciály z hlavy, bez počítání limit. Využíváme přitom:

- u funkcionálů zadaných integrálem se diferencování projeví pouze na integrandech
- pokud jsou nějaké členy mimo integrál, diferencujeme je taky, nikoho neušetříme
- x se chová jako konstanta
- derivujeme ve směru h pouze výrazy obsahující y nebo jeho derivace $(y', y'', \dots)$
- $\frac{\partial y}{\partial h} = h, \quad \frac{\partial y'}{\partial h} = h', \quad \frac{\partial y''}{\partial h} = h'', \quad \dots$
- platí běžná pravidla pro derivace (aritmetika, Leibniz, složená fce, ...)
- při vyšších derivacích se h chová se jako konstanta, Gâteauxův diferenciál vždy požírá y a vrací zpátky derivační směr (h, k, etc.)
- výrazy neobsahující y nebo jeho derivace $(y', y'', \dots)$ se vynulují
- při derivování v dalším směru k původní roli h převezme k

1.2 Fréchetův diferenciál

Fréchetův diferenciál funkcionálu Φ v bodě a a směru $\vec{h}$:

$$d\Phi(a) \;:=\; \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(a+\vec{h}) - \Phi(a) - \; L_h}{||h||} = 0$$

$$\text{kde } d\Phi(a) = L : X \to \mathbb{R}, \quad X = \text{normovaný lineární prostor}, \quad L_h = \text{většinou výsledek Gâteauxa}$$

$$\Phi : X \to \mathbb{R} \text{ funkcionál}, \quad a \in D_{\Phi \subset X} \text{ pevně zvolený bod funkce}, \quad \vec{h} \in X \text{ směr}$$

Užitečná vlastnost (pro odhadování):

$$||h|| = \max_{[a,b]} |h| + \max_{[a,b]} |h'| \qquad \text{maximová norma na } C^1([a,b])$$

Vztah Fréchetova a Gâteauxova diferenciálu:

$$\underbrace{\partial\Phi(y,\vec{h})}_{Gâteaux} \;=\; \underbrace{d\Phi y(h)}_{Fréchet} \qquad \text{pokud Fréchet existuje}$$

1.3 Vyšetřování extrémů funkcionálu

Nutná podmínka pro lokální extrém:

Má-li Φ v a extremálu $\quad \wedge \quad \exists$-li $\partial\Phi(a,\vec{h}) \quad \Rightarrow \quad \partial\Phi(a,\vec{h}) = 0$

1.3.1 Euler-Lagrangeova rovnice

Máme-li funkcionál:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,dx$$

(i) provedeme dočasnou substituci $z = y'$ dostaneme tak

$$\widetilde{f}(x,y,z)$$

(ii) tuto funkci parciálně zderivujeme podle y i podle z

$$\widetilde{f}_y(x,y,z) \qquad \widetilde{f}_z(x,y,z)$$

$$\text{kde } \widetilde{f}_y = \tfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}, \quad \widetilde{f}_z = \tfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial z} \quad \text{(zkrácený zápis)}$$

(iii) opět přeznačíme zpět $y' = z$

$$f_y(x,y,y') - \frac{d\,[f_z(x,y,y')]}{dx} \;=\; 0, \tag{E-L}$$

což jest tzv. Euler-Lagrangeova rovnice.

(iv) snažíme se vyhnout druhým derivacím, pokud je to možné

- výraz se snažíme ideálně zjednodušit do tvaru:

$$\frac{d(\sim y')}{dx} = 0$$

(v) zde můžeme vyintegrovat

$$\int \frac{d(\sim y')}{dx} = \int 0$$

(vi) dostaneme

$$(\sim y') = C$$

(vii) vyřešíme ODR a konstanty dopočítáme dle počátečních podmínek

(viii) sestavíme Hessovu matici druhých derivací:

$$H = \begin{pmatrix} f_{yy} & f_{yz} \\ f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

(ix) určíme její determinant (hessián)

(x) určíme její signaturu

$$\begin{array}{cccc} a) & \text{positivně (semi)definitní} & \Longrightarrow & \text{MINIMUM} \\ b) & \text{negativně (semi)definitní} & \Longrightarrow & \text{MAXIMUM} \\ c) & \text{indefinitní} & \Longrightarrow & \text{NIC NEVÍME,} \quad \text{musíme dále zkoumat} \end{array}$$

1.3.2 Jacobiho rovnice & konjugovaný bod

(xi) Nechť

$P(x) = f_{zz}(x, y, y') > 0$ pokud dokazujeme MINIMUM

NEBO

$P(x) = f_{zz}(x, y, y') < 0$ pokud dokazujeme MAXIMUM

(xii) a dále

$Q(x) = f_{yy}(x, y, y') - \frac{d[f_{yz}(x,y,y')]}{dx}$

(xiii) využijeme následujícího vztahu:

$$Qh - (Ph')' \;=\; 0, \tag{J}$$

což jest tzv. *Jacobiho rovnice.*

(xiv) vyjde nám předpis pro nějakou funkci h(x), kterou pak využijeme v následujícím bodě:

— *(na následující stránce)* —

Konjugovaný bod

Konjugovaným bodem $x \in (a, b]$ k bodu a
nazýváme takový bod, který dává netriviální řešení $h(x)$ *Jacobiho rovnice* splňující: $h(a) = h(x) = 0$

(xv) konjugované body brání konvexitě (resp. konkávitě) a tedy i existenci extrémů,

EXISTUJE	konjugovaný bod			$\Longleftrightarrow$	nikde v intervalu	NENÍ EXTRÉM
NEEXISTUJE	konjugovaný bod	$\wedge$	$P(x) < 0$	$\Longleftrightarrow$	v daném bodě	MINIMUM
NEEXISTUJE	konjugovaný bod	$\wedge$	$P(x) > 0$	$\Longleftrightarrow$	v daném bodě	MAXIMUM

1.3.3 Autonomní rovnice

Pokud (E-L) rovnice nezávisí na x, pak dostáváme tzv. autonomní rovnici (úlohu). Nejprve přeznačíme:

$$\widetilde{f}(x, y, z) = g\,(y, z)$$

a pro y stacionární bod Φ pak $\exists C \in \mathbb{R}$, že platí:

$$g(y, y') - y' g_z(y, y') = C$$

1.3.4 Regularita minimiséru

V některých případech jsme v bodě (iv) nuceni použít druhé derivace, na to ale potřebujeme ověřit, že naše funkce f „náleží prostoru C^2"

POKUD:

y stacionárním bodem Φ a pro nějaké $\xi \in (a, b)$ platí $f_{zz}\,(\xi,\ y(\xi),\ y'(\xi)) \neq 0$

POTOM $\Rightarrow$

y jest C^2 na nějakém okolí bodu ξ a existuje tedy y''

2 Stejnoměrná konvergence

2.1 Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

Na množině M (pro nás je to interval I) rozlišujeme tři druhy konvergence (od nejslabší po nejsilnější):

1. bodová konvergence ($f_n \to f$) na M
2. lokálně stejnoměrná konvergence ($f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$) na M
3. stejnoměrná konvergence ($f_n \rightrightarrows f$) na M

A platí implikace:

$$\exists \textit{ Stejnoměrné konvergence} \implies \exists \textit{ Lokálně stejnoměrné konvergence} \implies \exists \textit{ Bodové konvergence}$$

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \implies f_n \to f$$

2.1.1 Bodová konvergence

Zkoumáme, jestli posloupnost funkcí f_n konverguje v každém bodě množiny M k funkci f

Vyšetřujeme nejprve skrz bodovou limitu:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

kde limitíme skrz n a x jest parametr

Zkoumáme, jestli nám nevyjdou různé limitní funkce pro různě zvolená x.[1]

Prozkoumáme, kde jest limitní funkce $f(x)$ spojitá a omezíme se pouze na tyto intervaly.

Bodová konvergence je nutnou (nikoliv postačující) podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci. Pokud limita neexistuje na žádném intervalu I, f_n nekonvergují bodově a nemohou tak konvergovat ani stejnoměrně. RIP

2.1.2 Stejnoměrná & lokálně stejnoměrná konvergence

Pokud ověříme bodovou konvergenci, vrhneme se do zkoumání stejnoměrné konvergence.

Zde můžeme též dosadit do $f_n(x)$ významné body ze zkoumaných intervalů jako třeba $x = 0$ nebo $x = n$ x $\to \infty$ a pokusit se nakreslit si obrázek.

Pro stejnoměrnou konvergenci musí platit:

$$|f_n(x) - f(x)| \rightrightarrows 0 \text{ na } I \iff \lim_{n\to\infty} \sup_I |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{1}$$

Když se funkce f_n v krajních bodech intervalu I "nechovají hezky" (neplatí podmínka (1)) nemáme **stejnoměrnou**[2] konvergenci na uzavřeném intervalu I.

[1] ***Pozn.:*** *Parametr x nám může ovlivnit výslednou limitní funkci $f(x)$ a proto nám často rozseká řešení do několika intervalů. Na některých intervalech nemusí ani limita existovat.*

[2] **Pozn.:** Na uzavřených intervalech splývají **lokální stejnoměrná** se **stejnoměrnou** konvergencí.

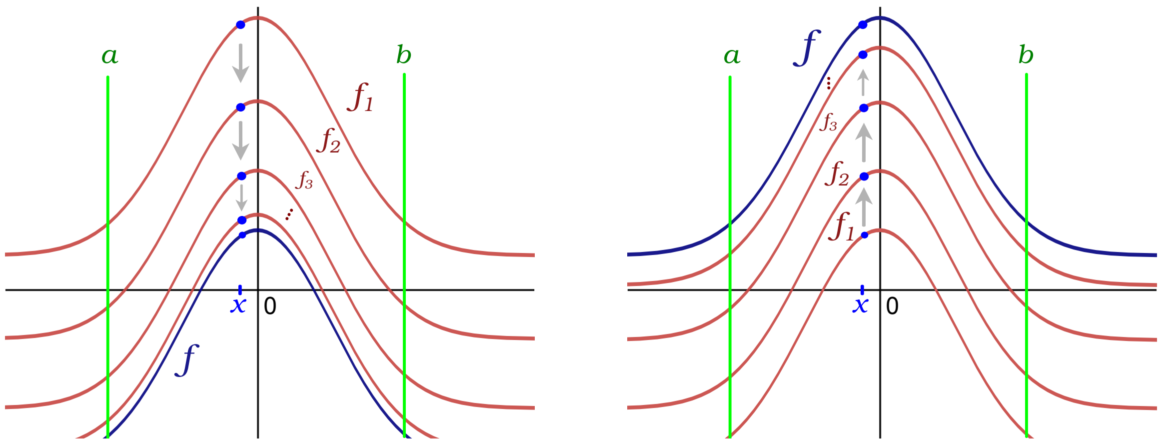
V takovém případě stále máme naději alespoň na **lokálně stejnoměrnou** konvergenci na nějakém otevřeném intervalu $J \subset I$. Tento interval J vznikne odseknutím okolí patologického krajního bodu intervalu I a dostaneme tak (polo)otevřený interval, kde už se nám mohou (ale nemusejí) funkce f_n pěkně sbíhat.

Hledáme kandidáty na extrémy (body nulové první derivace).

Výraz $(f_n(x) - f(x))$ derivujeme dle x:

$$\frac{d(f_n(x) - f(x))}{dx} \stackrel{?}{=} 0$$

Zároveň vždy vyšetřujeme monotonii (rostoucnost nebo klesajícnost) posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}$ pro $\forall$ pevně zvolená x z intervalu I. Tedy vlastně provádíme takové zkrácené vyšetřování funkčního průběhu.



2.2 Stejnoměrná konvergence řad funkcí

Analogicky k posloupnostem definujeme i bodovou a stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

Označíme-li $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, pak říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty}$

- **konverguje bodově** k funkci (součtu) s:

$$A \to \mathbb{R}, \text{ pokud } s_n \to s$$

- **konverguje stejnoměrně** k funkci (součtu) s:

$$A \to \mathbb{R}, \text{ pokud } s_n \rightrightarrows s$$

Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řad:

$$\text{Řada } \sum f_n \text{ konverguje stejnoměrně} \implies f_n \rightrightarrows 0.$$

2.2.1 Stejná omezenost a monotonie

Nechť $\{f_k\}$ je posloupnost (reálných, či komplexních) funkcí definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$. Potom říkáme, že posloupnost $\{f_k\}$ je

1. **stejně omezená**, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$, že
$$|f_n(x)| \leq K, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in A,$$
(reformulace: hodnoty funkcí $f_n(x)$ nevybočují na A z pásu vymezeném $-K$ a K)
2. **monotónní**, pokud platí $a_n \leq a_{n+1}$ na A, $n \in \mathbb{N}$, nebo $a_n \geq a_{n+1}$ na A, $n \in \mathbb{N}$.

2.2.2 Weierstrassův M-test

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na $A \subseteq \mathbb{R}^d$ a $\{a_n\}$ je **posloupnost** nezáporných reálných čísel. Předpokládejme navíc, že

- $|f_n(x)| \leq a_n$, $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, kde a_n je **konvergentní majorantou**[3]
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (řada posloupnosti a_n má konečný součet = konverguje)

$$\implies \qquad \text{Potom řada } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ konverguje stejnoměrně (na } A\text{).}$$

Pomocí tohoto kritéria například snadno dostaneme stejnoměrnou konvergenci řad $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ a $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$ skrze:

$$\frac{\sin nx}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \wedge \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ konverguje}$$
$$\frac{\cos nx}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \wedge \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ konverguje}$$

2.2.3 Abelovo, Dirichletovo a Leibnizovo kritérium

Nechť $\boldsymbol{\{a_n\}}$ *je* ***monotónní posloupnost*** *reálných funkcí definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$.*
&
Nechť $\boldsymbol{\{b_n\}}$ *je* ***posloupnost*** *(reálných, či komplexních) funkcí definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$.*

Tak pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- (Abel) $\boldsymbol{\{a_n\}}$ je stejně omezená a $\sum \boldsymbol{b_n}$ konverguje stejnoměrně (obojí na A),
- (Dirichlet) $\boldsymbol{a_n} \rightrightarrows \mathbf{0}$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum \boldsymbol{b_n}$ je stejně omezená (obojí na A),
- (Leibniz) $\boldsymbol{a_n}$ nerostoucí posloupnost, $\boldsymbol{a_n} \rightrightarrows \mathbf{0}$ a řada $\sum \boldsymbol{b_n} = \sum \boldsymbol{(-1)^n}$ (obojí na A),

$$\implies \qquad \text{Potom řada } \sum a_n b_n \text{ konverguje stejnoměrně (na } A\text{).}$$

Poznámky a příklady.

1. *Pro $\delta > 0$ platí, že řady $\sum \sin nx$ a $\sum \cos nx$ mají stejně omezené posloupnosti částečných součtů na $[\delta, 2\pi - \delta]$. Například tedy řady $\sum \frac{\sin nx}{n}$ a $\sum \frac{\sin nx}{n}$ konvergují stejnomětně na $[\delta, 2\pi - \delta]$ podle Dirichletova kritéria.*

[3]konvergentní majoranta = konvergující posloupnost čísel odhadující seshora $f_n(x)$ v absolutních hodnotách.

2.3 Hlubší důsledky stejnoměrné konvergence

Nechť $\{f_n\} \subset C([a,b])$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$,

$$\implies \quad (R)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n$$

2.3.1 Stejnoměrná konvergence derivací

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na omezeném intervalu (a,b) a nechť platí:

- $\boldsymbol{f_n'(x)}$ **existuje vlastní** pro všechna $x \in (a,b)$; $n \in \mathbb{N}$,
- **posloupnost $\boldsymbol{\{f_n'\}}$ konverguje stejnoměrně** (k nějaké funkci f),
- existuje $x_0 \in (a,b)$, že posloupnost $\boldsymbol{\{f_n(x_0)\}}$ **konverguje**.

$\implies$ Potom existuje $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, která má vlastní derivaci na (a,b) a platí:

$$f_n \rightrightarrows F$$

$$F' = f \text{ na } (a,b)$$

Důsledek: *Nechť $\{f_n\} \subset \mathcal{N}([a,b])$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$.*

$$\implies \quad (N)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} (N)\int_a^b f_n$$

Pozn: *Předchozí větu můžeme rovněž zformulovat v řeči řad funkcí, případně primitivních funkcí.*

2.3.2 Diniho věta

Nechť $\{f_n\} \subset C([a,b])$, $f \in C([a,b])$ a nechť dále platí

- $\boldsymbol{f_n \to f}$ na $[a,b]$,
- $\boldsymbol{\{f_n\}}$ je **monotónní** na $[a,b]$ (tedy pro $\forall$ pevně zvolené $x \in [a,b]$)

$$\implies \quad f_n \rightrightarrows f \text{ na } [a,b]$$

- -

2.4 Poznámky pod parou

- **Užitečné vztahy pro limity**:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \begin{cases} \not\exists & \text{pro } x<0 \\ 0 & \text{pro } x=0 \\ 1 & \text{pro } x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} 0 & \text{pro } x=0 \\ x & \text{pro } x\neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n+a^n} = a \qquad \text{pro } |x|<a, \qquad \text{(odvození dole)}^4$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n+a^n} = x \qquad \text{pro } |x|>a, \qquad \text{(odvození dole)}^5$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \not\exists & \text{pro } x\leq -1 \\ 0 & \text{pro } x\in(-1,1) \\ 1 & \text{pro } x=1 \\ +\infty & \text{pro } x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0 & \text{pro } x<0 \\ 1 & \text{pro } x=0 \\ +\infty & \text{pro } x>0 \end{cases}$$

- **Sudost, lichost**:

  Často si můžeme vyšetřování funkcí zjednodušit symetrií plynoucí z jejich vlastností. Platí:

$$f_n(x) = f_n(-x) \qquad \text{sudé fce } f_n$$

$$f_n(x) = -f_n(-x) \qquad \text{liché fce } f_n$$

  Pak stačí vyšetřovat funkce jen pro kladná x a pro záporná $-x$ dovedeme symetricky doplnit.

[4]neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n+a^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^n+1} = a\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^n}_{\to 0}+1} = a\cdot(0+1) = a$

[5]neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n+a^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n}\sqrt[n]{\left(1+\frac{a}{x}\right)^n} = x\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\underbrace{\left(\frac{a}{x}\right)^n}_{\to 0}} = x\cdot(1+0) = x$

- **sin(nx)**:

$$sin(nx) \qquad \text{má stejně omezené částečné součty}$$

- **cos(nx), $x \neq 0$**:

$$cos(nx),\ x \neq 0 \qquad \text{má stejně omezené částečné součty}$$

- **Známé součty řad**:

(a) částečný součet geometrické řady

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} x^n &= \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} && \text{pro } x \neq 1 \\ \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} x^n &= \frac{1 - x^{N}}{1 - x} x && \text{pro } x \neq 1 \end{aligned}$$

(b) součet a derivace geometrické řady

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1 - x} && \text{pro } x \in (-1, 1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} &= \frac{1}{(1 - x)^2} && \text{pro } x \in (-1, 1) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)n}{2} x^{n-2} &= \frac{1}{(1 - x)^3} && \text{pro } x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

(c) lomené řady

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} &= \ln(2) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\ \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

(d) logaritmus, (v testu možná nutno odvodit):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$$

(e) definice Taylorovy řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots \qquad \text{(Taylor)}$$

3 Lebesgueův integrál

3.1 Známé Taylorovy řady (opáčko)

Funkce	***Taylorova řada***	***Rozpis***	***Konverguje na***
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$	$-1 \leq x < 1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$	$-1 < x \leq 1$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} x^n$	$\|x\| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$
$(1+x)^{\frac{1}{2}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} x^n$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$	$\|x\| < 1$
$(1+x)^{-\frac{1}{2}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n$	$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \ldots$	$\|x\| < 1$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$	$x \in \mathbb{R}$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$	$\|x\| \leq 1$
$\operatorname{argtanh}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$	$\|x\| < 1$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$	$x \in \mathbb{R}$

kde $\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!} = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)$

3.2 Výpočet Lebesgueova integrálu

3.2.1 Početní postup

(I) Integrál $\int$ upravíme a identifikujeme v něm známý součet řady (geometrická, Taylorova, etc.)

(II) Známý součet řady přepíšeme na řadu samotnou $\sum$

(III) Vysuneme řadu před integrál $\sum \int$

(IV) Dopočítáme integrál (per partes, substituce, etc...)

(V) Zbyde nám řada $\sum$:

- (a) se známým součetem
- (b) upravitelná do známého součtu (přečíslením mezí, využitím rozkladu na parciální zlomky, etc...)

(VI) Zpětně ověříme předpoklady prohození integrálu a řady $\int \rightleftharpoons \sum$

3.2.2 Předpoklady prohození řady a integrálu

1. Ověřit, že jsou funkce ***měřitelné*** (triviální, třeba ze spojitosti)
2. Ověřit, že jsou funkce ***Lebesgueovsky integrovatelné*** (konečný výsledek = dokázáno automaticky)
3. Pro integrand $f_n(x)$ určit ***horní odhad*** nezávislý na x skrze[6] :
   - (a) Leviho věta
   - (b) Lebesgueova věta

3.2.3 Leviho věta (o monotonii)

Pokud

$$\left.\begin{array}{lll} \circ & \text{jde } f_n(x) \to f \text{ monotónně} & \text{(v závislosti na } n\text{)} \\ \circ & \text{hodnota } \left|\int f_n(x)\right| \leq M & \text{(konečný integrál)} \end{array}\right\} \implies \text{potom} \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_n(x) = \int f(x)$$

3.2.4 Lebesgueova věta (o majorantě)

Pokud $\exists a_n$ nezávislá na x taková, že:

$$\left.\begin{array}{lll} \circ & |f_n(x)| < a_n & \text{(posloupnost } a_n \text{ majorisuje integrand)} \\ \circ & \sum a_n < \infty & \text{(řada } \sum a_n \text{ konverguje)} \end{array}\right\} \implies \text{potom} \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_n(x) = \int f(x)$$

[6] Stačí aby platila alespoň jedna věta (Levi či Lebesgue), nemusejí obě platit naráz

4 Lebesgueův integrál (závislý na parametru)

Nechť:

$$F(\boldsymbol{p}) = \int_a^b f(\boldsymbol{p}, x)\, dx \tag{INT}$$

jest integrál o proměnné x a parametru $\boldsymbol{p}$

4.1 Definiční obor

Pro $\forall x \in (a, b)$ zkoumáme, pro která $\boldsymbol{p}$ zkoumaný $\int$ (INT) konverguje / diverguje

- odhadujeme funkcí $|f(\boldsymbol{p}, x)| < g(\boldsymbol{p}, x)$ seshora, kde g jest integrovatelná funkce
- dále se omezíme jen na intervaly $\boldsymbol{p}$, kde $F(\boldsymbol{p})$ je konečná ($\int$ (INT) konverguje)

4.2 Limita a spojitost integrálu

Nechť

- $f : P \times X \to \mathbb{R}$ integrand, $(\boldsymbol{p}, x) \to f(\boldsymbol{p}, x)$
- $P \subset \mathbb{R}$ otevřená množina parametrů
- $X \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná množina

4.2.1 3 podmínky limity

1) $x \mapsto f(\boldsymbol{p}, x)$ je ***měřitelná*** pro $\forall \boldsymbol{p} \in P \setminus \{p_0\}$ ($\boldsymbol{p}$ zde fixujeme, x měníme)

2) $\exists \lim\limits_{\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p_0}} f(\boldsymbol{p}, x) =: F(x)$ pro s.v. $x \in X$ (x zde fixujeme, $\boldsymbol{p}$ měníme)

3) $\exists g \in \mathscr{L}(X)$, že $|f(\boldsymbol{p}, x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ (konvergentní majoranta $g(x)$)

$$(1, 2, 3) \text{ platí} \quad \Longrightarrow \quad \text{potom platí, že} \quad F \in \mathscr{L}(X) \quad \text{a} \quad \lim_{\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p_0}} \int f(\boldsymbol{p}, x)\, dx \; =: \; \int F(x)\, dx$$

4.2.2 3 podmínky spojitosti

1) $x \mapsto f(\boldsymbol{p}, x)$ je ***měřitelná*** pro $\forall \boldsymbol{p} \in P$ ($\boldsymbol{p}$ zde fixujeme, x měníme)

2) funkce $\boldsymbol{p} \mapsto f(\boldsymbol{p}, x)$ je ***spojitá*** v $\boldsymbol{p_0}$ pro s.v. $x \in X$ (x zde fixujeme, $\boldsymbol{p}$ měníme)

3) $\exists g \in \mathscr{L}(X)$, že $|f(\boldsymbol{p}, x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ (konvergentní majoranta $g(x)$)

$$(1, 2, 3) \text{ platí} \quad \Longrightarrow \quad \text{potom platí, že} \quad \text{funkce } \boldsymbol{p} \mapsto \int f(\boldsymbol{p}, x)\, dx \quad \text{je } \textit{spojitá} \text{ v } \boldsymbol{p_0}$$

4.3 Derivace integrálu

Nechť

- $f : P \times X \to \mathbb{R}$ integrand, $(\boldsymbol{p}, x) \to f(\boldsymbol{p}, x)$
- $(X, \Sigma, \mu) \in \mathfrak{M}$ jest měřitelný prostor
- $P \subset \mathbb{R}$ otevřená množina parametrů

4.3.1 4 podmínky derivace

1) $x \mapsto f(\boldsymbol{p}, x)$ *měřitelná* pro $\forall \boldsymbol{p} \in P$
2) pro s.v. $x \in X$ a $\forall \boldsymbol{p} \in P$ $\exists$ vlastní parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, x)$ (parciálně podle parametru $\boldsymbol{p}$)
3) $\exists g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ taková, že $\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, x)\right| \leq g(x)$ pro s.v.$x \in X$ a $\forall \boldsymbol{p} \in P$ (majorisace parciální derivace)
4) $\exists \boldsymbol{p_0} \in P$ tak, že fce $x \mapsto f(\boldsymbol{p_0}, x) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ (pro 1 hodnotu $\boldsymbol{p}$ ověříme integrovatelnost $F(\boldsymbol{p})$)

$(1, 2, 3, 4)$ platí $\implies$ potom platí, že:

- $x \mapsto f(\boldsymbol{p}, x) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ pro $\forall \boldsymbol{p} \in P$
- zobrazení $\varphi : \boldsymbol{p} \mapsto \int_X f(\boldsymbol{p}, x)\, dx$ má na P vlastní derivaci a ta má tvar:

$$\varphi'(\boldsymbol{p}) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, x)\, dx$$

4.3.2 Monotonie, konvexita, konkávita

Analogicky můžeme určovat i derivace vyšších řádů (po opětovném ověření 4 podmínek pro každý řád derivace zvlášť).

Odsud pak můžeme zkoumat u funkce $F(\boldsymbol{p})$ například:

- monotonii
- konvexitu/konkavitu
- stacionární body
- zjednodušený funkční průběh

Pozn.: *Funkce $F(\boldsymbol{p})$ NENÍ primitivní funcí, ale JE funkcí definovanou určitým integrálem s parametrem $\boldsymbol{p}$*

5 Křivkové a plošné integrály

Využití *Lebesgueova integrálu* k výpočtu integrálu na křivkách či jejich zobecněních, id est:

k-plochách v *d-rozměrném prostoru*, $d \in \mathbb{N}$ a $1 \le k \le d$

Pozn.: Jest-li $k = d$, pak se jedná o "klasický" Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^d$.

5.1 Křivkový integrál

Jest-li $\boldsymbol{k = 1}$ mluvíme o *křivkovém integrálu*, neboť 1-rozměrné objekty v $\mathbb{R}^d$ jsou *křivky* (trajektorie).

Nechť $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^d$ *regulární křivka.* Pak definujeme pro $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ křivkový integrál 1. resp. 2 druhu předpisem:

5.1.1 Křivkový integrál 1. druhu

$$\int\limits_{\langle\varphi\rangle} f\, ds := \int_a^b f(\varphi(t))\, \|\varphi'(t)\|\, dt$$

pokud integrál napravo existuje.

V případě více úseků s různými parametrisacemi je sčítáme $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$

neboli: $\sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} f(\varphi(t))\, \|\varphi'(t)\|\, dt$

Příklad:

$$\int\limits_{\varphi} (x^3 + y)\, ds \qquad \text{kde } \varphi = \text{kružnice}, \quad \begin{array}{l} x = cos(t) \\ y = sin(t) \end{array}$$

5.1.2 Křivkový integrál 2. druhu

$$\int\limits_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int\limits_{\langle\varphi\rangle} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_d dx_d$$

$$:= \int_a^b \vec{f} \cdot \vec{t}\, ds \quad = \quad \int_a^b \vec{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

pokud integrál napravo existuje (jako Lebesgueův, Riemannův či Newtonův).

Příklad:

$$\int\limits_{\varphi} (x^2 + y,\, x^3 + 2y^2)\, d\vec{s} = \int (x^2 + y)\, dx + (x^3 + 2y^2)\, dy$$

Závislost orientace:

Pokud změníme orientaci dané parametrisace, alias místo křivky φ použijeme křivku opačnou $\ominus\varphi$, dostaneme následující:

$$\int_{\langle\ominus\varphi\rangle} f\,ds = \int_{\langle\varphi\rangle} f\,ds \qquad \text{(1. druh)}$$

$$\int_{\langle\ominus\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds} = -\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds} \qquad \text{(2. druh)}$$

5.2 Plošný integrál

Budiž $S \subset \mathbb{R}^3$ **regulární** plocha parametrisovaná parametrisací

$\varphi : (u,v) \in M \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. PAK plošný integrál 1. resp. 2. druhu definujeme jako:

5.2.1 Plošný integrál 1. druhu

$$\int_S f\,dS := \int_M f(\varphi(u,v))\ \|\vec{t}(u,v)\times\vec{r}(u,v)\|\ du\,dv$$

kdykoliv má integrál napravo smysl

Příklad:

$$\int_S (x^2+2y^2+z^3)\,dS \qquad \text{kde S = sféra,} \quad \begin{aligned} x &= R\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y &= R\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= R\cos(\theta) \end{aligned}$$

5.2.2 Plošný integrál 2. druhu

$$\int_S \vec{f}\cdot\vec{dS} := \int_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \int_M \vec{f}(\varphi(u,v))\cdot\big(\vec{t}(u,v)\times\vec{r}(u,v)\big)\ du\,dv$$

kdykoliv integrál vpravo existuje

Příklad:

$$\int_S (x^2+y,\ x^3+2y^2, z^3)\,d\vec{S}$$

A) Pomůcka pro výpočet vektorového součinu $||\vec{t}(u,v) \times \vec{r}(u,v)||$:

$$„det" \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

kde:

$$\vec{t} = \varphi_u = \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \varphi_v = \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

B) Alternativně skrz Gramovu matici, např:

$$\underset{2\times 2}{G} = \underset{2\times 3}{\begin{vmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{vmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix}}$$

kde G je positivně definitní matice a gramián roven jest:

$$\sqrt{|\, det\, G\,|} = ||\vec{t}(u,v) \times \vec{r}(u,v)||$$

Závislost orientace:

Jsou-li $\phi \not\sim \overset{\sim}{\phi}$ dvě neekvivalentní parametrisace regulární plochy S

$$\int\limits_{<\phi(I)>} f\, dS \quad = \int\limits_{<\overset{\sim}{\phi}(I)>} f\, dS \qquad \text{(1. druh)}$$

$$\int\limits_{<\phi(I)>} \vec{f} \cdot \vec{dS} \quad = - \int\limits_{<\overset{\sim}{\phi}(I)>} \vec{f} \cdot \vec{dS} \qquad \text{(2. druh)}$$

Jsou-li $\phi \sim \overset{\sim}{\phi}$ dvě ekvivalentní parametrisace regulární plochy S

$$\int\limits_{<\phi(I)>} f\, dS \quad = \int\limits_{<\overset{\sim}{\phi}(I)>} f\, dS \qquad \text{(1. druh)}$$

$$\int\limits_{<\phi(I)>} \vec{f} \cdot \vec{dS} \quad = \int\limits_{<\overset{\sim}{\phi}(I)>} \vec{f} \cdot \vec{dS} \qquad \text{(2. druh)}$$

5.3 Fubiniho a substituční věta + parametrisace

5.3.1 Fubiniho věta

Převod dvojného (nebo vícečetného integrálu) na 2 (nebo více) jednoduchých integrálů.

$$\int\limits_U dX \quad \to \quad \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} dx_d \cdots dx_1$$

!Pozor na meze! Meze vnějšího integrálu a_1, b_1 jsou nezávislé, ale meze vnitřních integrálů jsou závislé, nakonec meze a_d, b_d jsou závislé postupně na a_{d-1}, b_{d-1} až a_1, b_1.

„Výpočet takového integrálu je jako loupání inversní cibule, zevnitř směrem ven."

Ing. Tomáš Pfeifer

5.3.2 Věta o substituci

Početní postup

(I) nejprve si nakreslíme obrázek, jak vypadá množina (průnik množin), na které budeme integrovat

(II) poté volíme parametrisaci, všímáme si symetrií, snažíme se vykompensovat nerovnost tak, aby byla omezená pouze čísly zleva i zprava

(III) dáváme pozor na správnou volbu mezí, meze jsou často vzájemně závislé

(IV) vyjádříme si (2D případ):

$$\Phi = \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \Phi^{-I} = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

(V) a vypočítáme jakobián (obecná dimense)

$$J_\phi = det \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \text{nebo} \quad J_{\phi^{-I}} = det \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1^{-I}}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1^{-I}}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2^{-I}}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2^{-I}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

SUBSTITUČNÍ VZOREČEK:

$$\int\limits_U f(\phi(x))\ |J_\phi(x)|\, dx = \int\limits_{\phi(U)} f(y)\, dy$$

Výpočet plochy množiny

Pokud počítáme skrze substituci obsah plochy zadané množiny, položíme $f(\phi(x)) \equiv 1$

Dostaneme:

$$\int\limits_U |J_\phi(x)|\, dx = S$$

5.3.3 Souřadnicová parametrisace

Polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= R\cos(\varphi), \qquad & R &\in [0, r] \\ y &= R\sin(\varphi), \qquad & \varphi &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

$$J_\phi = det \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -R\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & R\cos(\varphi) \end{vmatrix} = R \qquad \text{(Jakobián)}$$

$$f(x, y) = f(R\cos(\varphi), R\sin(\varphi)) = f(\phi(R, \varphi))$$

Válcové souřadnice

$$\begin{aligned} x &= R\cos(\varphi), \qquad & R &\in [0, r] \\ y &= R\sin(\varphi), \qquad & \varphi &\in [0, 2\pi] \\ z &= z \end{aligned}$$

$$J_\phi = det \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -R\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & R\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = R \qquad \text{(Jakobián)}$$

$$f(x, y, z) = f(R\cos(\varphi), R\sin(\varphi), z) = f(\phi(R, \varphi, z))$$

Sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= R\cos(\varphi)\sin(\theta), \qquad & \theta &\in [0, \pi] \qquad & &\text{(doplněk zeměpisné šířky)} \\ y &= R\sin(\varphi)\sin(\theta), \qquad & \varphi &\in [0, 2\pi] \qquad & &\text{(zeměpisná délka)} \\ z &= R\cos(\theta), \qquad & R &\in [0, r] \end{aligned}$$

$$J_\phi = det \begin{vmatrix} R\cos(\varphi)\cos(\theta) & -R\sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ R\sin(\varphi)\cos(\theta) & R\cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ -R\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{vmatrix} = R^2 sin(\theta) \qquad \text{(Jakobián)}$$

$$f(x, y, z) = f(R\cos(\varphi)\sin(\theta),\ R\sin(\varphi)\sin(\theta),\ R\cos(\theta)) = f(\phi(\theta, \varphi, R))$$

Vyplatí se některé známé jakobiány pamatovat si nazpaměť

5.3.4 Některé známé křivky/plochy

Název	***Typ***	***Funkční předpis***	***Graficky***	***Poznámka***
Sféra	objem	$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$		
Hyperboloid	objem	$y^2 + z^2 - x^2 \leq r^2$		jednodílný
Hyperboloid	objem	$y^2 - z^2 - x^2 \leq r^2$		dvoudílný
Kužel	objem	$y^2 + z^2 \leq x^2$		
Paraboloid	objem	$y^2 + z^2 \leq x$		eliptický
Lemniskáta	křivka	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$		
Asteroida	křivka	$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$		
Kardioida	křivka	$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$		

Pozn.: Osa kuželu je vždy ve směru členu s odlišným znaménkem.

5.4 Greenova, Stokesova a Gaussova věta

5.4.1 Greenova věta

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, hranice $\partial\Omega$ je *jednoduchá uzavřená křivka*

$$\int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial\Omega} f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2$$

kde $\vec{f} = (f_1, f_2), \quad f_1(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2)$

Poznámka 1: *To, jestli jest křivka uzavřená, nejlépe poznáme pro explicitně zadaný předpis φ dosazením krajních mezí do křivky a porovnáním jejích hodnot $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$.*

Pokud není uzavřená, tedy $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, poté <u>nemůžeme</u> Greenovu větu použít.

5.4.2 Stokesova věta

Oblast Ω je regulární 2D plocha $\subset \mathbb{R}^3$, hranice $\partial\Omega$ je regulární křivka $\subset \mathbb{R}^3$

PAK pro $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ PLATÍ:

$$\underbrace{\int\limits_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{ds}}_{\text{křivkový, 2. druhu}} = \underbrace{\int\limits_{G} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{ds}}_{\text{plošný, 2. druhu}}$$

Pomůcka pro výpočet vektorového součinu:

$$„det" \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \longrightarrow \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

5.4.3 Gaussova věta

Oblast Ω je těleso $\subset \mathbb{R}^3$, hranice $\partial\Omega$ je plocha $\subset \mathbb{R}^3$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\nabla \cdot \vec{F}\right) \, dx \, dy \, dz = \int\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

5.4.4 Věta o potenciálu

Pro křivkový integrál 2. druhu (i pro vyšší dimense)

Nechť U jest potenciál vektorové funkce $\vec{f}$ (resp. vektorového pole $\vec{T}$)

Nutná podmínka existence potenciálu:

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} \qquad \text{obecně:} \quad \forall i,j \ \frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i}$$

Pak platí, že derivace jsou záměnné a existuje tedy potenciál U

Má-li $\vec{T}$ potenciál, pak:

$$\int\limits_{\gamma} \vec{T} \, d\vec{s} = \int\limits_{\gamma} T_1 dx_1 + \ldots + T_n dx_n = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

kde $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$; $\gamma : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$

Potenciál - 2D případ:

$$\int_{\gamma} f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$$

Integrujeme:

$$U(x) = \int f_1(x,y)\,dx = F_1 + C(y)$$

$$U(y) = \int f_2(x,y)\,dy = F_2 + D(x)$$

Porovnáme $U(x)$ a $U(y)$ a určíme členy $C(y)$ a $D(x)$ tak, aby:

$$U(x) + C(y) = U(y) + D(x) = U(x,y)$$

Nyní už víme, jak vypadá potenciál daného vektorového pole, tedy můžeme nyní do něj dosadit křivku s jejími krajními hodnotami a získat tak kýžený výsledek.

Trik na závěr:

Příklad křivky:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Jest lepší nejprve dosaditi meze do zadané křivky, alias vypočítat:

$$\gamma(a) = \begin{pmatrix} \dots a \\ \dots a \end{pmatrix} \qquad \gamma(b) = \begin{pmatrix} \dots b \\ \dots b \end{pmatrix}$$

a odsud pak dosaditi do potenciálu $U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$ než dosadit křivku do potenciálu a pak dosadit její meze. Usnadní nám to počítání.