

# I. MECHANIKA

## 7. Kontinuum



# Obsah

---

- Pojem kontinua.
- Lagrangeův a Eulerův popis kontinua.
- Trajektorie a proudnice.
- Helmholtzova věta.
- Deformace kontinua.
- Tenzor deformací.
- Význam složek tenzoru deformací.
- Tenzor rychlosti deformace. Couettovo proudění.
- Klasifikace sil v kontinuu.
- Síly objemové a plošné.
- Mechanické napětí. Skalární a vektorové napětí.
- Mechanické napětí vztažené k bodu. Tenzor napětí.
- Hlavní osy tenzoru napětí.
- Rovnice rovnováhy kontinua.
- Pohybová rovnice kontinua.

# Pojem kontinua

---

- popis pohybu tekutin (kapaliny, plyny)
- elastické deformace (pevné látky)
  
- makroskopický (fenomenologický) popis
- neprojevuje se detailní struktura látek
- průměrné hodnoty veličin v okolí vyšetřovaného bodu
  
- popis pomocí reálných funkcí
- spojitost i na škálách, kde ve skutečnosti molekulární nebo atomová struktura
- zkoumáme elementy kontinua, nikoli indexované částice
  
- nezabývá se pohybem kontinua jako celku (translace, rotace)
- studuje změny vzájemných vzdáleností (elastické látky), případně rychlostí (tekutiny)

# Lagrangeův a Eulerův popis kontinua

- prostor – souvislá množina  $M_G$  geometrických bodů  $B_G$  (polohové vektory  $\vec{r}$ )
- těleso – souvislá množina  $M_M$  materiálových bodů (elementů kontinua)  $B_M$  (vektory  $\vec{R}$ )
- axiom kontinuity  $\Rightarrow$  každému bodu  $B_G$  je v každém okamžiku přiřazen bod  $B_M$

## Lagrangeův popis

- v čase  $t = 0$  vybereme element kontinua  $B_M$  ležící na souřadnicích  $\vec{r}$
- sledujeme pohyb  $B_M$  v čase – polohu  $\vec{R}$ , rychlost, zrychlení i další vlastnosti (teplotu, tlak)
- polohu v tělese  $\vec{R}$  chápeme jako funkci počáteční polohy a času  $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t)$
- vhodnější pro popis elastického kontinua

## Eulerův popis

- v prostoru vybereme pevný bod  $B_G$  na souřadnicích  $\vec{r}$
- sledujeme rychlost  $\vec{v}$  elementů kontinua  $B_M$ , které se při pohybu prostorem právě nacházejí v poloze  $\vec{r}$ , jakož i jejich další vlastnosti (zrychlení, teplotu, tlak)
- výsledkem je pole rychlostí jako funkce polohy v prostoru a času  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$
- vhodnější pro popis tekutin

# Trajektorie a proudnice

---

## Lagrangeova metoda

- pohyb elementu kontinua  $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t)$
- $\Rightarrow$  trajektorie všech částic kontinua
- nekonečný počet rovnic
- často stačí konečný počet reprezentativních trajektorií (rovnic)

## Eulerova metoda

- pole rychlostí částic v prostoru  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$
- pro pevný čas lze sestavit křivky, jejichž tečny mají směr vektoru rychlosti
- tyto čáry se nazývají proudnice (proudočáry)
- proudnice se nemohou křížit
- obecně se proudnice s časem mění

## trajektorie a proudnice

- obecně nesplývají
- splynou v případě stacionárního (ustáleného) proudění

# Helmholtzova věta

- zkoumáme, jak se mění rychlosti blízkých částic

- Eulerův popis  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \rightarrow$

$$v_i = v_i(y_j, t)$$

- vyjádříme rychlost v okolí bodu  $y_j$

$$v_i(y_j + dy_j, t) = v_i(y_j, t) + \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy_j}_{dv_i}$$

- derivaci  $\frac{\partial v_i}{\partial y_j}$  (tenzor 2. řádu) rozepíšeme

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right)$$

(rozklad tenzoru na symetrickou a antisymetrickou část)

- pak

$$v_i(y_j + dy_j, t) = \underbrace{v_i(y_j, t)}_{\text{rychlost translace}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) dy_j}_{\text{rychlost rotace}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) dy_j}_{\text{rychlost deformace}}$$

**rychlost translace** – pohyb kontinua jako celku

**rychlost rotace** – pohyb kontinua jako celku (rovno nule, pokud kontinuum jen deformováno)

**rychlost deformace** – změny vzdáleností částic v okolí bodu  $y_j$

první Helmholtzova věta: Pohyb kontinua v okolí určitého bodu lze rozložit na pohyb translační, rotační a na pohyb deformační.

# Deformace kontinua

Lagrangeův popis

poloha elementu  $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t) \rightarrow y_j = y_j(x_i, t)$

v čase  $t = 0$

$$y_j = y_j(x_i, 0) = x_j$$

v čase  $t = \Delta t$

$$y_j = y_j(x_i, \Delta t)$$

časová závislost se nezkoumá

$$y_j = y_j(x_i)$$

vektor posunutí

$$u_j = y_j - x_j$$

počáteční  $P$ , konečná  $Q$  poloha

$$y_j = y_j(x_i) = x_j + u_j(x_i)$$

bod  $P'$  v okolí bodu  $P$

$$x'_j = x_j + dx_j$$

$P'$  se přesune do  $Q'$  posunutím

$$u_j + du_j$$

podle obrázku platí

$$u_j + dy_j = dx_j + u_j + du_j$$

tedy

$$dy_j = dx_j + du_j$$

posunutí pomocí diferenciálu

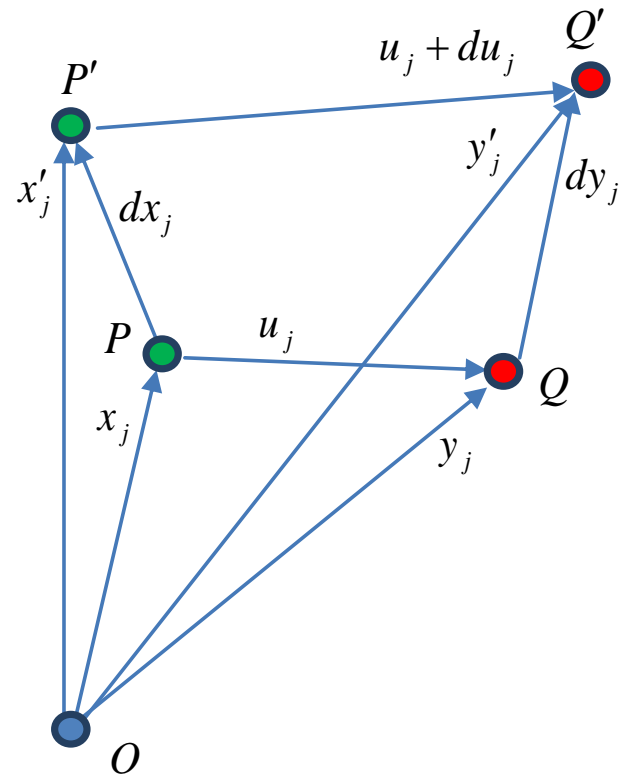
$$dy_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$$

vzdálenost bodů  $P$  a  $P'$

$$ds_0 = \sqrt{dx_j dx_j}$$

vzdálenost bodů  $Q$  a  $Q'$

$$ds = \sqrt{dy_j dy_j}$$



# Čtverec vzdálenosti testovacích bodů

určíme rozdíl čtverců vzdáleností blízkých bodů  $P$  a  $P'$  před a po deformaci

$$ds^2 - ds_0^2 = dy_j dy_j - dx_j dx_j$$

nejprve vypočteme čtverec

$$ds^2 = dy_j dy_j = (dx_j + du_j)(dx_j + du_j)$$

dosadíme za diferenciál  $du_j$

$$ds^2 = \left( dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l \right) \left( dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_k \right)$$

zjednodušení pomocí Kroneckerova symbolu

$$dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l = \left( \delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) dx_l$$

po dosazení lze přeskupit

$$ds^2 = \left( \delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) dx_l \left( \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_k = \left( \delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_l dx_k$$

roznásobit

$$ds^2 = \left( \delta_{jl} \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \delta_{jk} + \delta_{jl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_l dx_k$$

využít vlastností  $\delta_{ij}$

$$ds^2 = \underbrace{\delta_{jl} \delta_{jk} dx_l dx_k}_{dx_j dx_j} + \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \delta_{jk} dx_l dx_k}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}} + \underbrace{\delta_{jl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_l dx_k}_{\frac{\partial u_l}{\partial x_k}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_l dx_k$$



# Tenzor velkých deformací

využitím vlastností  $\delta_{ij}$

$$ds^2 = \underbrace{\delta_{jl}\delta_{jk}dx_l dx_k}_{dx_j dx_j} + \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \delta_{jk} dx_l dx_k}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}} + \underbrace{\delta_{jl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_l dx_k}_{\frac{\partial u_l}{\partial x_k}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_l dx_k$$

čtverec vzdálenosti bodů  $P$  a  $P'$

$$ds^2 = \underbrace{dx_j dx_j}_{ds_0^2} + \underbrace{\left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)}_{2\varepsilon_{lk}} dx_l dx_k$$

rozdíl čtverců vzdáleností před a po deformaci

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{lk} dx_l dx_k$$

definovali jsme novou veličinu

$$\varepsilon_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$$

- obsahuje derivace složek vektoru posunutí podle souřadnic (tenzor 2. řádu)
- z definice plyne, že  $\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{kl} \Rightarrow$  symetrický tenzor
- nazývá se **tenzor velkých deformací**
- obecně funkcí souřadnic  $\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{lk}(x_i)$
- přiřazením této veličiny každému bodu kontinua zadáno **tenzorové pole**

# Tenzor deformace

dále předpokládáme, že deformace malé

- prodloužení/zkrácení nejvýše 1%
- → lze zanedbat malé veličiny druhého řádu

definujeme **tenzor malých deformací** (často jen **tenzor deformace**)

- opět symetrický tenzor

- $$e_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

- pro malé deformace s dobrým přiblížením platí  $ds^2 - ds_0^2 = 2e_{lk}dx_l dx_k$

lze také vycházet z koncového (deformovaného) stavu

- v analogických výpočtech se vyjde od  $x_i = y_i - u_i$ , derivuje se podle souřadnic ypsilon, změní se některá znaménka a tenzor velkých deformací bude odlišný

- pro tenzor  $\bar{e}_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l}{\partial y_k} \right)$  nicméně platí shodný vztah  $ds^2 - ds_0^2 = 2\bar{e}_{lk}dy_l dy_k$

# Význam diag. složek tenzoru deformace

deformace elementu rovnoběžného s osou  $x_1$

$$(dx_1, 0, 0)$$

výchozí délku elementu označíme  $l_0$

$$l_0^2 = dx_1 dx_1$$

délku v deformovaném stavu označíme  $l$

$$l^2 = dy_i dy_i$$

změna čtverce délky (napravo zůstal ze součtu jediný člen)  $dy_i dy_i - dx_1 dx_1 = 2e_{11} dx_1 dx_1$

lze vyjádřit pomocí délek elementu

$$l^2 - l_0^2 = 2e_{11} l_0^2$$

protože  $|l - l_0| \ll l_0 \approx l$ , můžeme psát

$$2e_{11} = \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{(l - l_0)(l + l_0)}{l_0^2} \approx \frac{(l - l_0)2l_0}{l_0^2} = \frac{(l - l_0)2}{l_0}$$

závěr:

$$e_{11} \approx \frac{l - l_0}{l_0}$$

diagonální složka tenzoru malých deformací značí relativní změnu délky elementu, který byl původně rovnoběžný s příslušnou osou kartézské souřadnicové soustavy

# Význam nediag. složek tenzoru deformace

pro jednoduchost uvažujme rovinnou deformaci (jen dvě osy, tenzor 4 složky)  
předpokládejme, že

protože  $e_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$ , musí být splněno

$$e_{11} = e_{22} = 0 \text{ a } e_{12} = e_{21} \neq 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \text{ a } \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \neq 0$$

uvažme element kontinua rovnoběžný s osou  $x_1$

$$(dx_1, 0)$$

po deformaci bude mít složky

$$dy_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$$

rozepíšeme a dosadíme

$$\left\{ \begin{array}{l} dy_1 = dx_1 + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \underbrace{dx_2}_0 = dx_1 \\ dy_2 = \underbrace{dx_2}_0 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \underbrace{dx_2}_0 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \end{array} \right.$$

element má po deformaci složky

$$\left( dx_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \right)$$

# Význam nediag. složek tenzoru deformace

analogicky pro element rovnoběžný s osou  $x_2$

$$(0, dx_2)$$

po deformaci bude mít složky

$$dy_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$$

dostaneme

$$\left\{ \begin{array}{l} dy_1 = \underbrace{dx_1}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \underbrace{dx_1}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\ dy_2 = dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \underbrace{dx_1}_0 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 = dx_2 \end{array} \right.$$

element má po deformaci složky

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2, dx_2 \right)$$

# Význam nediag. složek tenzoru deformace

element rovnoběžný s osou  $x_1$

$$(dx_1, 0)$$

po deformaci složky

$$\left(dx_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1\right)$$

element rovnoběžný s osou  $x_2$

$$(0, dx_2)$$

po deformaci složky

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2, dx_2\right)$$

pro úhly  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  platí

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

a

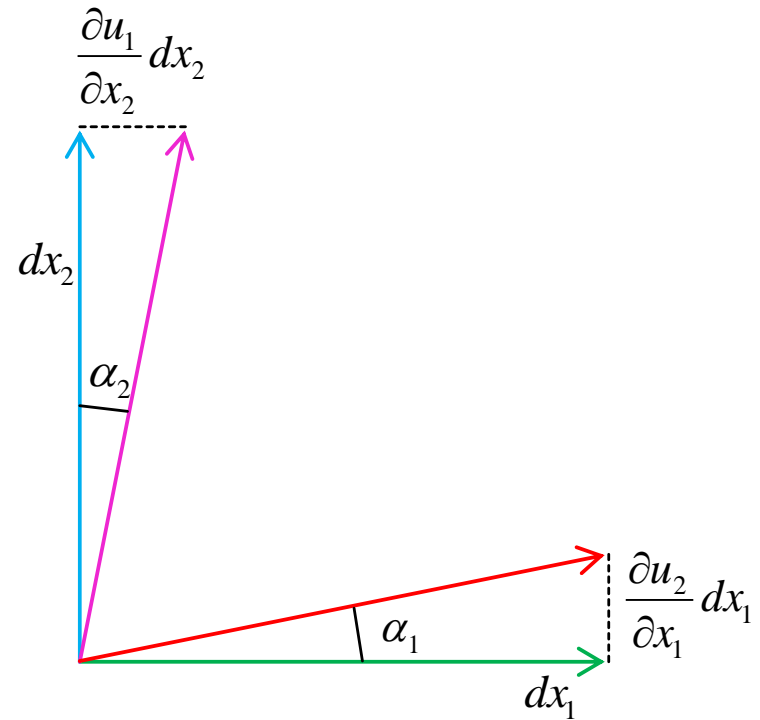
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

pro malé deformace

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha$$

pak

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2e_{12}$$



**závěr:** smíšená složka tenzoru deformace  $e_{12}$  je rovna polovině úhlu  $\alpha_1 + \alpha_2$ , o který se deformací změní pravý úhel mezi elementy původně rovnoběžnými s první a druhou osou kartézské soustavy souřadnic; úhel  $\alpha_1 + \alpha_2$  se nazývá **úhel smyku**

# Tenzor rychlosti deformace

vystupuje v deformační části Helmholtzovy rovnice

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right)$$

Ize ho chápat jako časovou derivaci tenzoru malých deformací  $\bar{e}_{ij}$  ( $= e_{ij}$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{e}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_j \partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i \partial t} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) = D_{ij}$$

pár metodologických poznámek:

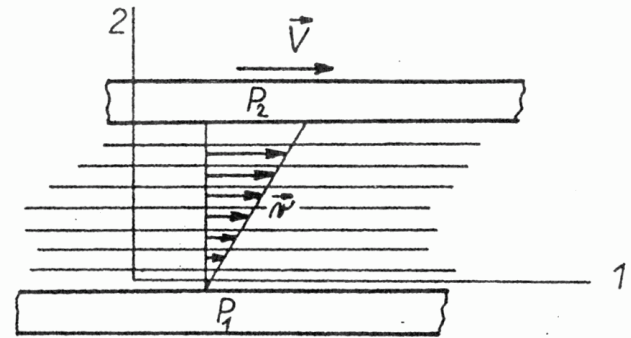
- využití zejména pro popis tekutin (proto užity proměnné spojené s kontinuem)
- v tekutinách není praktické používat tenzor deformací, protože velmi rychle se malé deformace změňí ve velké (problém neřeší ani použití t. velkých deformací)
- bylo by třeba výpočet „nulovat“ tak, aby deformace byly stále malé (problém je principiálně řešitelný, ale není to praktické)
- výpočet tenzoru rychlosti deformace se v praxi neprovádí derivováním tenzoru deformace, nýbrž se vychází přímo ze znalosti rychlostního pole

# Couettovo proudění

mezi dvěma deskami

- $P_1$  ... pevná deska
- $P_2$  ... deska pohybující se rychlostí  $\vec{V}$

rychlost vrstev kapaliny  $\vec{v}$  se plynule mění



nenulová složka posunutí

nenulová složka rychlosti

nenulová prostorová derivace

nenulová složka tenzoru malých deformací

nenulová složka tenzoru rychlosti deformace

- časovou derivací tenzoru malých deformací
- prostorovou derivací rychlosti

$$u_1 = ky_2 t$$

$$v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = ky_2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_2} = kt$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} kt$$

$$D_{12} = \frac{\partial}{\partial t} e_{12} = \frac{1}{2} k$$

$$D_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right) = \frac{1}{2} k$$



# Klasifikace sil v kontinuu

---

## vnější síly

- vnější silové působení (známe z popisu tuhého tělesa)

## vnitřní síly

- v tuhém tělese se o nich neuvažovalo
- zprostředkovávají působení vnějších sil
- působí jako reakce proti tendenci vnějších sil porušit rovnováhu uvnitř kontinua a měnit jeho tvar („drží látku pohromadě“)
- určují se metodou myšleného řezu (Euler), řezem se vnitřní síla stává silou vnější a můžeme ji určit z podmínek rovnováhy oddělené části
- uvnitř kontinua neplatí všechny postupy používané v tuhých tělesech – nelze sílu posunout po přímce a změnit její působiště (změnilo by to rozložení vnitřních sil)

# Objemové a plošné síly

---

## objemové síly $\vec{F}_o$

- síly dlouhého dosahu (gravitační, elektrostatické,...), setrvačné síly
- působí v celém objemu (nikoli jen na povrchu)
- působí nezávisle na silách, které působí na sousední objekty

## plošné (povrchové) $\vec{F}_p$

- síly krátkého dosahu
- působí mezi nejbližšími molekulami nebo atomy (molekulární síly/atomové vazby)
- vnější síla působí pouze na molekuly tvořící povrch tělesa (povrchové síly) – příkladem jsou tlak nebo tření
- účinek povrchových sil se přenáší dovnitř tělesa – stejné síly působí i mezi jednotlivými elementy kontinua

# Kvantifikace objemových sil

---

- intenzita síly (na jednotkovou hmotnost)

- $\vec{I}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_o(\vec{r}, t)}{\Delta M} = \frac{d\vec{F}_o}{dm}$

- $\vec{F}_o(\vec{r}, t) = \int_{\Delta M} \vec{I} dm = \int_{\Delta V} \rho \vec{I} dV$

- hustota síly (na jednotkový objem)

- $\vec{G}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_o(\vec{r}, t)}{\Delta V} = \frac{d\vec{F}_o}{dV}$

- $\vec{F}_o(\vec{r}, t) = \int_{\Delta V} \vec{G}(\vec{r}, t) dV$

- porovnáním

- $\vec{G} = \rho \vec{I}$

# Kvantifikace plošných sil

---

- za deformaci kontinua zodpovídají plošné síly
- zjednodušeně: při deformaci se změní polohy částic (tím se naruší dřívější rovnováha), síly mezi částicemi se snaží kontinuum navrátit do výchozího stavu
- plošná hustota povrchové síly (síla působící na jednotkovou plochu)

- **(mechanické) napětí**  $\vec{T} = \frac{d\vec{F}_P}{dS}$   $[\vec{T}] = 1\text{N/m}^2 = \text{Pa}$

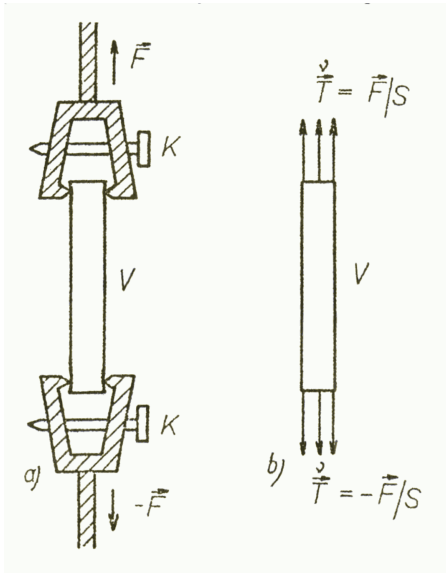
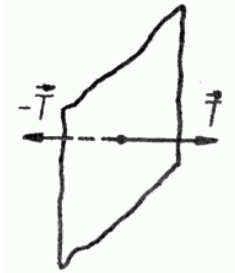
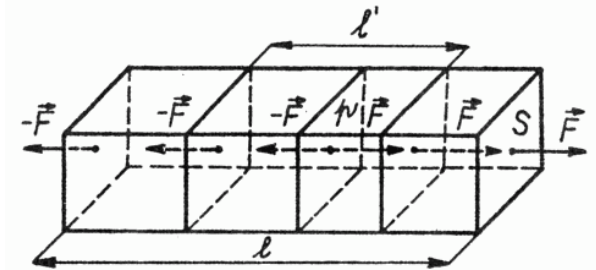
# Skalární mechanické napětí

---

- deformované kontinuum se dostane do stavu napjatosti
- tento stav charakterizujeme napětím – plošnou silou působící mezi sousedními elementy kontinua
- v jednoduchých případech, kdy pracujeme pouze s velikostí síly, se často mechanické napětí chápe jako skalární veličina  $\sigma = \frac{dF_P}{dS}$
- znaménková konvence pro skalární napětí na vnější ploše kontinua
  - napětí kladné – míří ven – tah
  - napětí záporné – míří dovnitř – tlak

# Typy mechanického napětí. Čistý tah

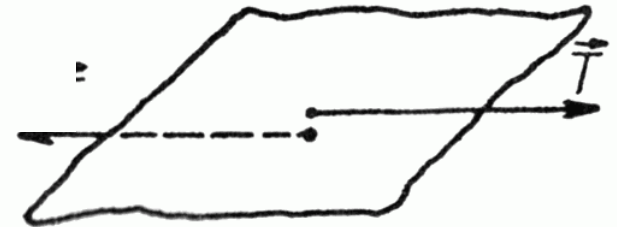
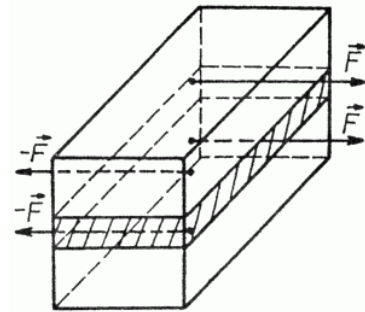
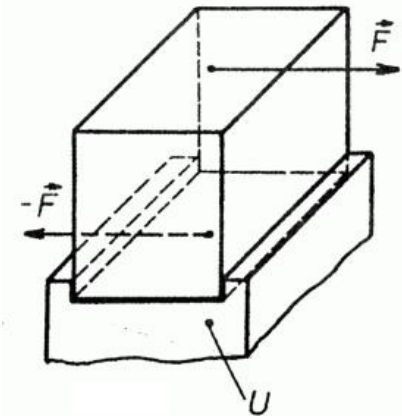
- tyč délky  $l$  a průřezu  $S$  napínána na obou koncích silami  $\vec{F}$  a  $-\vec{F}$
- stejné síly působí i na libovolně krátké úseky tyče
- v limitním případě působí síly na plochu procházející libovolným bodem
- v případě síly kolmé k ploše jde o **normálové napětí (čistý tah)**



- **Saint-Venantův princip** – stav napětí a deformace v místech dostatečně vzdálených od povrchu, na kterém působí vnější síly, je téměř stejný, nahradíme-li jedno rozložení sil jiným o stejné výsledné síle a výsledném momentu sil

# Typy mechanického napětí. Čistý smyk

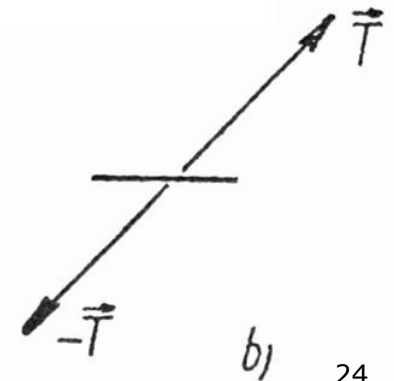
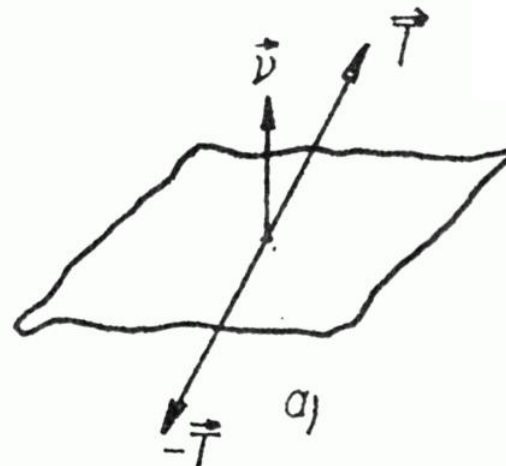
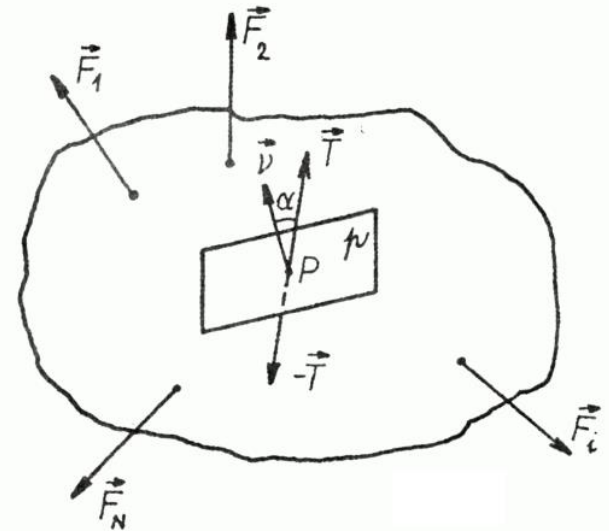
- na horní a dolní plochu ukotveného (kvůli vyrovnaní momentu sil) bloku působí síly tečné k plochám (smykové síly)



- uvažujme limitní ztenčování vrstvy
- nakonec působí smyková síla na plochu
- **tečné napětí (čistý smyk)**

# Typy mech. napětí. Obecné tahové napětí

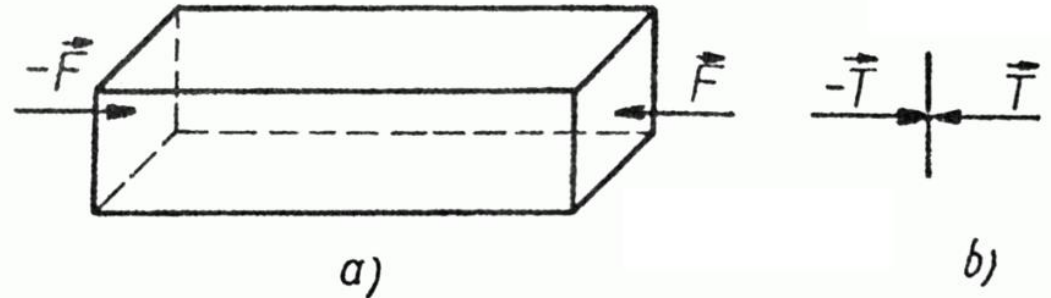
- na kontinuum obecného tvaru působí síly  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_N$
- na plošku  $p$  proloženou bodem  $P$  působí vektor napětí  $\vec{T}$ , který svírá obecný úhel  $\alpha$  s normálou  $\vec{\nu}$  k plošce  $p$
- **obecné tahové napětí** lze rozložit na tečnou a normálovou složku
- limitní přechod k ploše (a)
- schematické znázornění obecného tahového napětí (b)



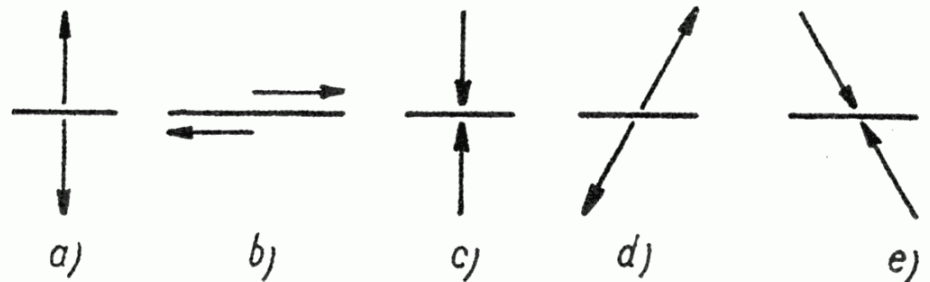


# Typy mechanického napětí. Čistý tlak

- na tyč tlačí síly kolmo k protějším stěnám
- limitní přechod k ploše
- **čistý tlak**



- schematické znázornění různých druhů napětí
  - čistý tah
  - čistý smyk
  - čistý tlak
  - obecné tahové napětí
  - obecné tlakové napětí



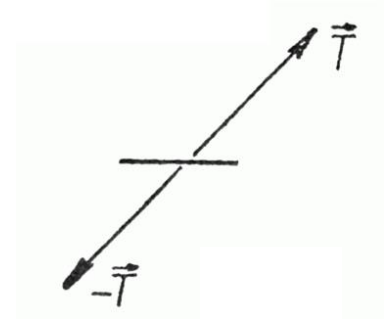
# Mechanické napětí vztažené k bodu

uvažujme plošku na povrchu elementu kontinua (element může ležet jak na povrchu kontinua, tak uvnitř)

- velikost i směr plošné síly závisí na orientaci plošky
- plošná síla má vzhledem k plošce obecnou orientaci
- vektor napětí  $\vec{T}$  má směr stejný jako vektor plošné síly
- daným bodem lze vést libovolný počet různých plošek

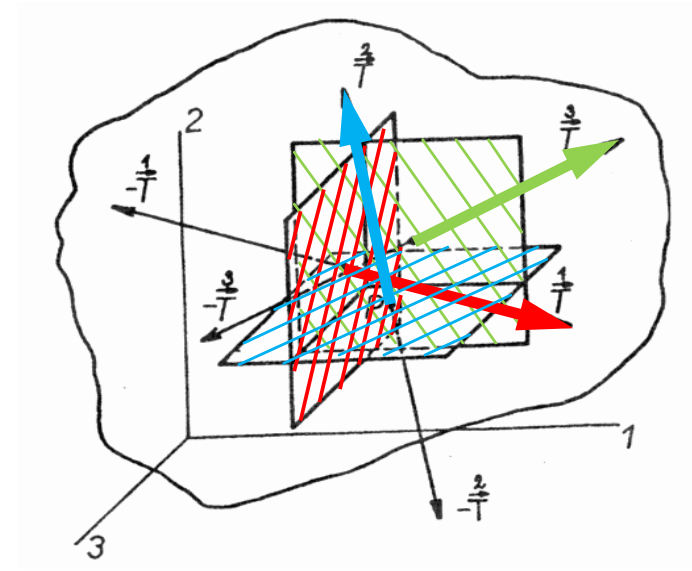
⇒ obecně tedy témuž bodu lze přiřadit mnoho různých vektorů napětí

**snažíme se najít způsob, jak jednoduše v určeném bodě vypočítat vektor napětí pro zadanou orientaci plochy**



# Zavedení tenzoru napětí

- v bodě  $P$  uvažujeme obecná tahová napětí na plochách kolmých k osám kartézské soustavy souřadnic
- napětí působící na plochu kolmou k  $i$ -té ose značíme  $\vec{T}^i$
- kartézské složky vektoru  $\vec{T}^i$  budeme značit  $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$



- tenzor napětí 

$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$
$\sigma_{21}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{23}$
$\sigma_{31}$	$\sigma_{32}$	$\sigma_{33}$

umíme pomocí těchto 9 veličin stanovit napětí působící v bodě  $P$  na plochu obecné orientace?

# Napětí pro obecně orientovanou plochu

- v okolí bodu  $P$  uvažujeme elementární čtyřstěn
- 3 plochy kolmé k souřadnicovým osám
- 1 plocha s normálovým vektorem  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

## čtyřstěn v rovnováze

$$\vec{T} S - \vec{T} S_1 - \vec{T} S_2 - \vec{T} S_3 + V\vec{G} = 0$$

- kolmé plošky lze chápat jako průměty obecné plochy

$$S_1 = S \cos \alpha_1 = S v_1$$

$$S_2 = S \cos \alpha_2 = S v_2$$

$$S_3 = S \cos \alpha_3 = S v_3$$

- při limitním přechodu objem čtyřstěnu konverguje k nule, tedy objemová síla vymizí

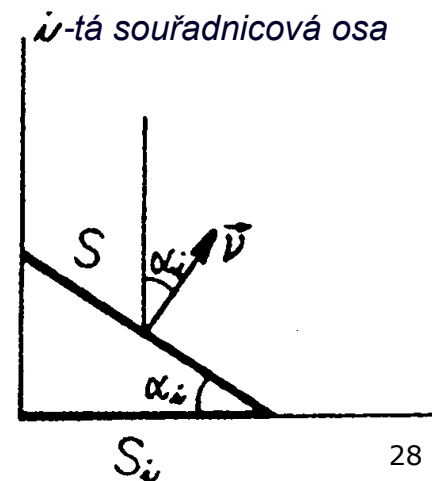
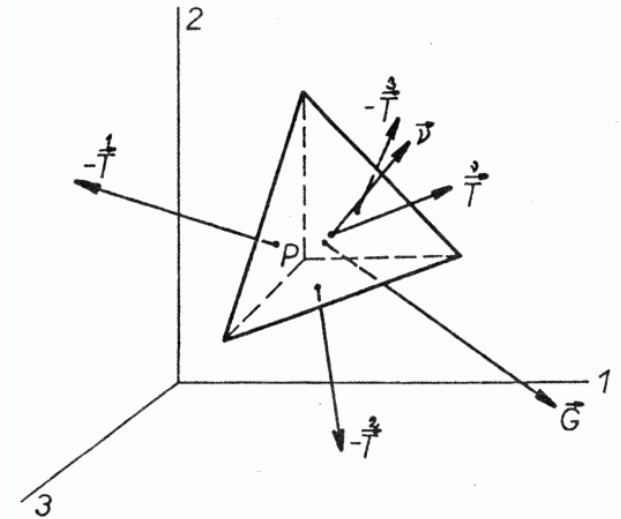
$$\vec{T} S - \vec{T} S v_1 - \vec{T} S v_2 - \vec{T} S v_3 = S \left( \vec{T} - \vec{T} v_1 - \vec{T} v_2 - \vec{T} v_3 \right) = 0$$

- hledané napětí působící na obecně orientovanou plochu

$$\vec{T} = \vec{T} v_1 + \vec{T} v_2 + \vec{T} v_3$$

- ve složkovém formalismu

$$T_i^v = \sigma_{ji} v_j \quad (\text{sloupec } \times \text{ řádek})$$



# Druhá podmínka rovnováhy

- krychlový element v klidu → celkový moment sil nulový
- předpokládáme **homogenní napětí**, tj. ve všech bodech krychlového elementu působí napětí popsané stejnými koeficienty  $\sigma_{ij}$
- celkový moment sil vzhledem k bodu P

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{T}^1 a^2 + \vec{r}_2 \times \vec{T}^2 a^2 + \vec{r}_3 \times \vec{T}^3 a^2 + \\ &+ (-\vec{r}_1) \times (-\vec{T}^1 a^2) + (-\vec{r}_2) \times (-\vec{T}^2 a^2) + (-\vec{r}_3) \times (-\vec{T}^3 a^2) = \\ &= 2\vec{r}_1 \times \vec{T}^1 a^2 + 2\vec{r}_2 \times \vec{T}^2 a^2 + 2\vec{r}_3 \times \vec{T}^3 a^2 \end{aligned}$$

víme, že  $\begin{cases} \vec{r}_1 = (a/2, 0, 0) \\ \vec{r}_2 = (0, a/2, 0) \\ \vec{r}_3 = (0, 0, a/2) \end{cases}$  a  $\begin{cases} \vec{T}^1 = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \\ \vec{T}^2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) \\ \vec{T}^3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}) \end{cases}$

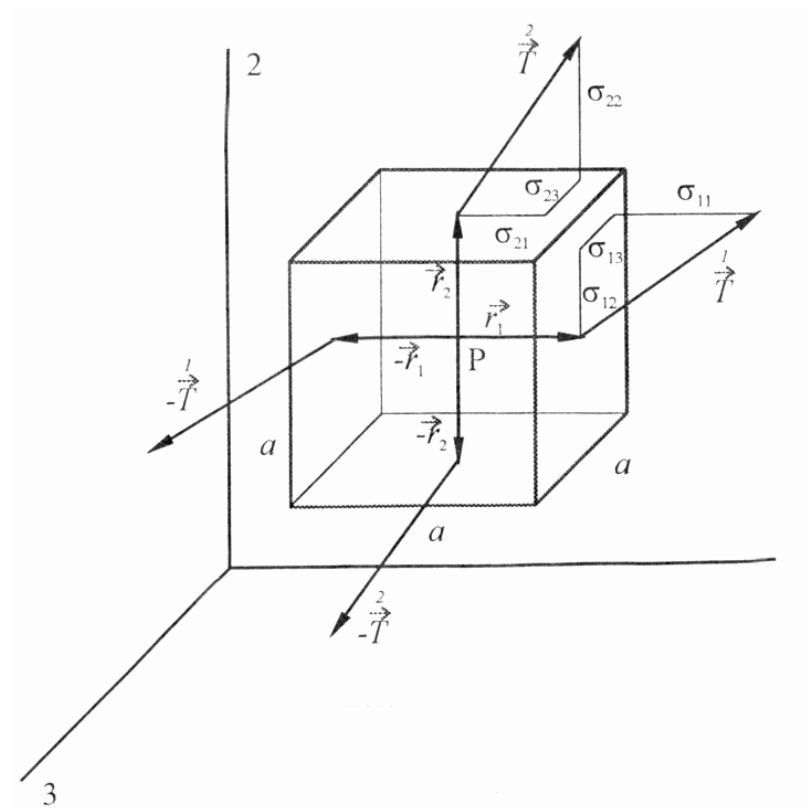
- pak složky momentu sil v rovnováze

$$M_1 = a^3 \sigma_{23} - a^3 \sigma_{32} = 0$$

$$M_2 = -a^3 \sigma_{13} + a^3 \sigma_{31} = 0$$

$$M_3 = a^3 \sigma_{12} - a^3 \sigma_{21} = 0$$

- proto musí platit  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ ;  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ ;  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$



# Vlastnosti tenzoru napětí

- pro složky tenzoru napětí platí

$$\begin{cases} \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{cases}$$

- veličiny  $\sigma_{ij}$  představují symetrický tenzor 2. řádu
- tenzor popisuje stav napětí v každém bodě kontinua

- platí

$$T_i^v = \sigma_{ji} v_j = \sigma_{ij} v_j \quad \text{resp.}$$

$$\vec{T}^v = \vec{\sigma} \vec{v}$$

- síla působící na plošku

$$F_i = S T_i^v \quad \text{resp.}$$

$$\vec{F} = S \vec{T}^v$$

- při použití orientované plošky  $\vec{S} = S \vec{v}$

- dostaneme pro sílu

$$F_i = \sigma_{ij} S_j \quad \text{resp.}$$

$$\vec{F} = \vec{\sigma} \vec{S}$$

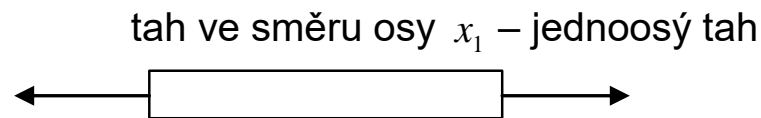
- tenzorové pole

- každému bodu kontinua přiřazeno 6 čísel (obecně se mění od bodu k bodu)
- nejde o materiálový tenzor, který odráží symetrii systému (krystalová struktura)
- tento tenzor popisuje působící síly, může být orientován libovolně vzhledem k symetriím

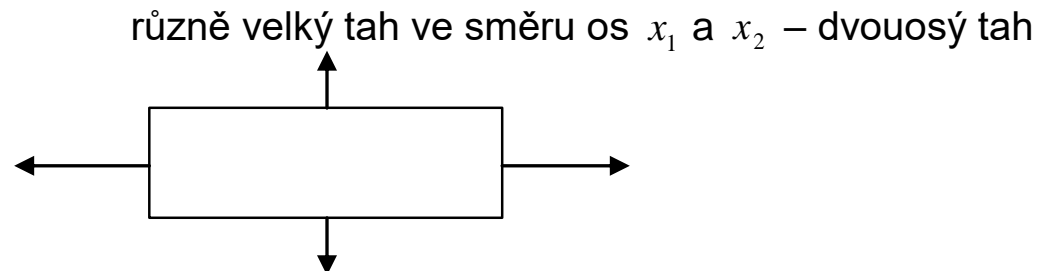
# Hlavní osy tenzoru napětí – tah

- diagonalizace – nalezení hlavních směrů (řešení charakteristické rovnice)
- 3 hlavní osy – pro plochy kolmé k těmto osám je napětí čistým tahem/tlakem (jen diagonální složky tenzoru napětí – jen normálové složky k plochám)
- geometrická interpretace – elipsoid napětí

- $$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- $$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



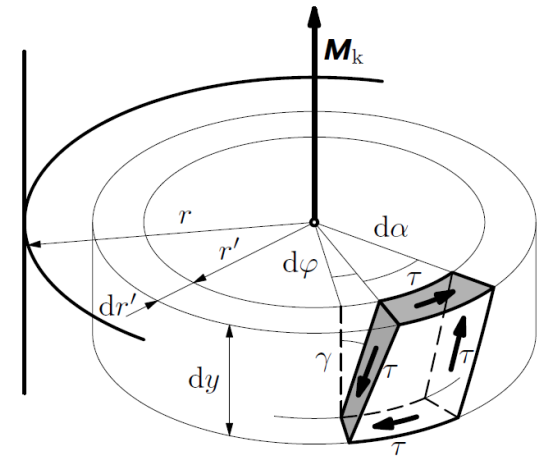
- $$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} \\ p &> 0 \end{aligned}$$

stejný tah ve třech osách – trojosý tah – hydrostatický tlak

# Hlavní osy tenzoru napětí – smyk / torze

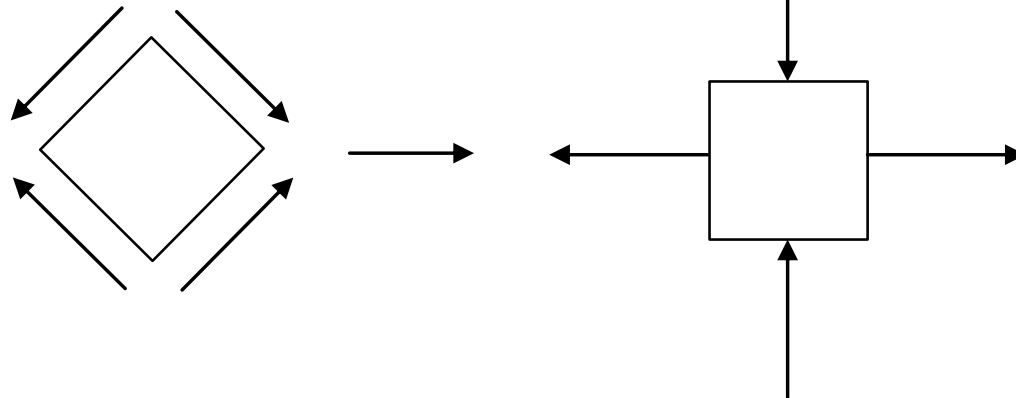
- $$\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

smyk/torze



- diagonalizací smyk přejde na dvouosý tah/tlak

- $$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





# Rovnice rovnováhy kontinua

- elementární kvádr v rovnováze – součet všech plošných sil pro všechny stěny a objemové síly musí být nulový
- plošné síly odhadneme pomocí hodnot ve vhodně zvolených bodech uvnitř stěn
- objemovou sílu odhadneme hodnotou ve vhodně zvoleném bodě uvnitř kvádru

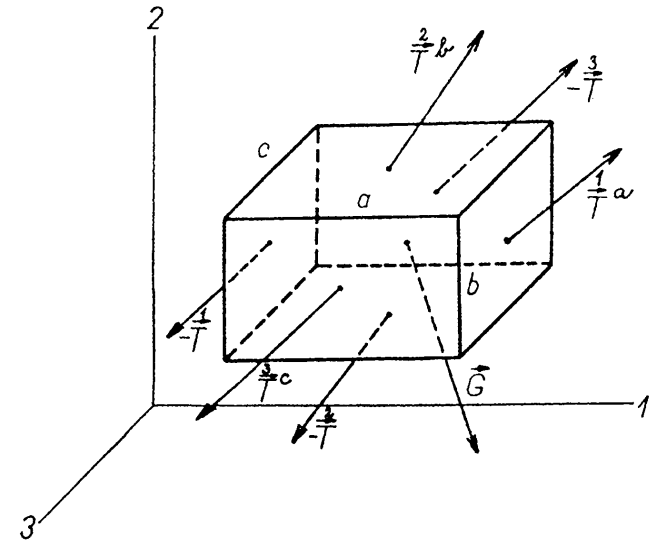
$$\left(\vec{T}^1 - \vec{T}^1\right)bc + \left(\vec{T}^2 - \vec{T}^2\right)ac + \left(\vec{T}^3 - \vec{T}^3\right)ab + \vec{G}abc = 0$$

- po složkách

$$(\sigma_{11}^a - \sigma_{11}^b)bc + (\sigma_{21}^b - \sigma_{21}^a)ac + (\sigma_{31}^c - \sigma_{31}^b)ab + G_1 abc = 0$$

$$(\sigma_{12}^a - \sigma_{12}^b)bc + (\sigma_{22}^b - \sigma_{22}^a)ac + (\sigma_{32}^c - \sigma_{32}^b)ab + G_2 abc = 0$$

$$(\sigma_{13}^a - \sigma_{13}^b)bc + (\sigma_{23}^b - \sigma_{23}^a)ac + (\sigma_{33}^c - \sigma_{33}^b)ab + G_3 abc = 0$$



# Rovnice rovnováhy kontinua

- užitím představy o střední hodnotě lze pro elementární kvádr vyjádřit rozdíl složek napětí na protějších stěnách ve tvaru diferenciálu  $\Delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\Delta x$ , kde derivace přísluší nějakému bodu uvnitř kvádru

$$\begin{array}{lll} \sigma_{11}^a - \sigma_{11} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} a & \sigma_{21}^b - \sigma_{21} = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} b & \sigma_{31}^c - \sigma_{31} = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} c \\ \sigma_{12}^a - \sigma_{12} = \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} a & \sigma_{22}^b - \sigma_{22} = \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} b & \sigma_{32}^c - \sigma_{32} = \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} c \\ \sigma_{13}^a - \sigma_{13} = \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} a & \sigma_{23}^b - \sigma_{23} = \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} b & \sigma_{33}^c - \sigma_{33} = \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} c \end{array}$$

- spojením dostaneme

$$\begin{array}{l} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} abc + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} bac + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} cab + G_1 abc = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} abc + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} bac + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} cab + G_2 abc = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} abc + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} bac + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} cab + G_3 abc = 0 \end{array}$$

- při limitním zmenšování kvádru lze jeho objem  $abc$  vykrátit

# Rovnice rovnováhy kontinua

- všechny „vhodně zvolené“ body pro vyjádření středních hodnot přejdou při limitním zmenšování kvádrů do jediného bodu

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + G_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + G_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + G_3 = 0$$

- popsaný postup lze provést pro libovolný bod kontinua

- rovnice  $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0$  představuje podmínku rovnováhy, která musí být splněna

v každém bodě kontinua

# Pohybová rovnice kontinua

pokud elementární kvádr není v rovnováze

- levá strana – celková vnější síla působící na kvádr
- pravá strana – nahradit součinem zrychlení  $\vec{a}_s$ , s nímž se pohybuje hmotný střed kvádru, a celkové hmotnosti  $M = \rho abc$  ( $\rho$  je hustota v některém vnitřním bodu kvádru)

- získáme rovnici 
$$\left(\vec{T}^{\overset{1}{a}} - \vec{T}^{\underset{1}{a}}\right)bc + \left(\vec{T}^{\overset{2}{b}} - \vec{T}^{\underset{2}{b}}\right)ac + \left(\vec{T}^{\overset{3}{c}} - \vec{T}^{\underset{3}{c}}\right)ab + \vec{G}abc = M\vec{a}_s$$

- zrychlení hmotného středu lze zapsat jako druhou derivaci výchylky  $\vec{a}_s = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$

- spojením dostaneme 
$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} abc + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} bac + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} cab + G_1 abc = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \rho abc$$

...

- při limitním zmenšování kvádru lze opět jeho objem  $abc$  vykrátit
- „vhodně zvolené“ body pro vyjádření středních hodnot přejdou do jediného bodu

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + G_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

...

- popsaným postupem získáme pro libovolný bod **pohybovou rovnici kontinua**