

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA C

LUBOŠ PICK

Příklad C1. Vyšetřete pro která $x \in [-1, 1]$ konverguje a pro která $x \in [-1, 1]$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} (\arcsin x)^n.$$

(10 bodů)

Příklad C2. Spočtete primitivní funkci

$$\int \frac{(\log(x))^3 + 2 \log(x)}{x(\log(x))^3 - x} dx$$

na všech intervalech, na kterých existuje.

(10 bodů)

Příklad C3. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje Newtonův integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\frac{\pi}{2} - x} \right)^{\alpha} \operatorname{tg}(x) dx.$$

(10 bodů)

Příklad C4. Uvažujte funkci $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Předpokládejme, že $u(0, 0) = 2$ a $\nabla u(0, 0) = (-1, 2)$. Předpokládejme, že $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y) = ((1 - \cos y)u(x, y), u(x - y, y), u(xy, y)) \quad \text{pro } [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Předpokládejme, že $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ takové, že $G'(0, 2, 2)$ je reprezentována maticí

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Položme $H = G \circ F$. Rozhodněte, zda existuje $H'(0, 0)$ a pokud ano, nalezněte její reprezentující matici. Spočtete $D_v H_2(0, 0)$, kde $H = (H_1, H_2)$ a $v = (-1, 2)$. **(10 bodů)**

Příklad C5. Nechť $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku nebo protipříkladem na jeho platnost.

(a) Jestliže $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje, potom $\int_0^{\infty} f(x+2) dx$ konverguje.

(b) Jestliže $\int_0^{\infty} f(x+2) dx$ konverguje, potom $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje.

(c) Jestliže $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje, potom $\int_0^{\infty} (f(x))^2 dx$ konverguje.

(10 bodů)

$$\boxed{C1} \quad x \in [-1, 1], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} (\arcsin x)^n$$

Řešení! Označ $a_n = \frac{n}{n^2+1} (\arcsin x)^n$.

Nechť $x \in (-\sin 1, \sin 1)$. Potom (\arcsin je liché a rostoucí)

$$-1 = -\arcsin(\sin 1) = \arcsin(-\sin 1) < \arcsin x < \arcsin(\sin 1) = 1,$$

takže $|\arcsin x| < 1$, a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} |\arcsin x| \stackrel{\text{VOL}}{=} |\arcsin x| < 1.$$

Tedy $\sum a_n$ AK.

Nechť $x \in [-1, -\sin 1) \cup (\sin 1, 1]$. Potom (jako výše)

$|\arcsin x| > 1$, a tedy $\lim a_n \neq 0$. Tedy $\sum a_n$ D.

Nechť $x = \sin 1$. Potom $a_n = \frac{n}{n^2+1}$. Označ

$$b_n = \frac{1}{n}. \text{ Pak } \sum b_n \text{ D, } a_n > 0, b_n > 0, \text{ a } \lim \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Tedy (LSK) $\sum a_n$ D.

Nechť $x = -\sin 1$. Potom $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

Dokážeme, že $\left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\}$ je klesající! To plyne

z následující sady ekvivalencí: $\forall n$ platí

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1]$$

$$\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 < n(n^2 + 2n + 2)$$

$$\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

$$\Leftrightarrow 1 < n^2 + n, \quad \text{což platí.}$$

Naně platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$. Tedy dle Leibnizovy

věty řada $\sum a_n$ konverguje.

Závěr : řada AK pro $x \in (-\sin 1, \sin 1)$

K pro $x \in [-\sin 1, \sin 1)$.

Hodnocení : $(-\sin 1, \sin 1) \dots 2$
 $[-1, 1] \setminus [-\sin 1, \sin 1] \dots 3$

$$\boxed{C2} \quad \int \frac{\log^3 x + 2 \log x}{x \cdot \log^3 x - x} dx$$

Rěšen! substituce (vos 1)

$$\varphi(y) = e^y, \quad y \in (0, 1) \text{ nebo } y \in (1, \infty),$$

$$\varphi^{-1}(x) = \log x, \quad x \in (0, e) \text{ nebo } x \in (e, \infty),$$

$$\varphi((0, 1)) = (0, e), \quad \varphi((1, \infty)) = (e, \infty),$$

$\varphi'(y) = e^y$ je vlastn' a nenulov' a

$$\forall y \in (0, 1) \text{ a } \forall y \in (1, \infty)$$

Zkraceny' zapis substituce:

$$y = \log x, \quad dy = \frac{dx}{x}, \quad x \in (0, e), x \in (e, \infty).$$

Označ $J = \int \frac{y^3 + 2y}{y^3 - 1} dy$. Potom

$$\frac{y^3 + 2y}{y^3 - 1} = 1 + \frac{1 + 2y}{y^3 - 1}$$

rozklad na parciáln' zlomky:

$$\frac{1+2y}{y^3-1} = \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{y^2+y+1}$$

$$1+2y = A(y^2+y+1) + (By+C)(y-1)$$

$$\text{"}y^2\text{" : } 0 = A + B$$

$$\text{"}y\text{" : } 2 = A - B + C$$

$$\text{"}1\text{" : } 1 = A - C$$

Tedy $A=1, C=0, B=-1$. Takže

$$\frac{1+2y}{y^3-1} = \frac{1}{y-1} - \frac{y}{y^2+y+1}$$

Tudiž

$$J = \int \left(1 + \frac{1}{y-1} - \frac{y}{y^2+y+1} \right) dy$$

Postupně máme

$$\int 1 dy \stackrel{c}{=} y, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{y-1} dy \stackrel{c}{=} \log |y-1|, \quad \begin{array}{l} y \in (-\infty, 1), \\ y \in (1, \infty), \end{array}$$

$$\int \frac{y}{y^2+y+1} dy = \frac{1}{2} \int \frac{2y+1}{y^2+y+1} dy - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2+y+1},$$

$$\int \frac{dy}{y^2+y+1} = \int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dy}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1}$$

$$\stackrel{c}{=} \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(y+\frac{1}{2}\right) \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(y+\frac{1}{2}\right) \right).$$

Tedy

$$J \stackrel{c}{=} y + \log |y-1| - \frac{1}{2} \log (y^2+y+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(y+\frac{1}{2}\right) \right).$$

Podle VOS tedy platí

$$I \stackrel{c}{=} \log x + \log |\log x - 1| - \frac{1}{2} \log (\log^2 x + \log x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\log x + \frac{1}{2}\right) \right),$$

$$x \in (0, e) \quad \text{nebo} \quad x \in (e, \infty).$$

Hodnocení

převod na J ... 1

rozklad na zlomky ... 2

integrace zlomků 5

VOS ... 1

interval ... 1

C3

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{x}{\frac{\pi}{2} - x} \right)^\alpha \operatorname{tg} x \, dx$$

Řešení! Označ $f(x) = \left(\frac{x}{\frac{\pi}{2} - x} \right)^\alpha \operatorname{tg} x$,

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Položíme $g(x) = x^{\alpha+1}$ pro $x \in (0, 1]$. Potom

f a g jsou spojité a nezáporné na $(0, 1]$ a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\pi} \right)^\alpha \frac{x^\alpha \operatorname{tg} x}{x^{\alpha+1}}.$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \right)^\alpha \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^1 f(x) \, dx$ konverguje právě tehdy,

když $\int_0^1 g(x) \, dx$ konverguje, což nastává pro

$$\alpha + 1 > -1, \text{ tedy } \alpha > -2.$$

Položíme $h(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{-\alpha-1}$ pro $x \in [1, \frac{\pi}{2})$. Potom

f, h jsou spojité a nezáporné na $[1, \frac{\pi}{2})$ a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{h(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x^\alpha \operatorname{tg} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x^\alpha \sin x \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-1}{-\sin x} = 1,$$

$$\text{tedy } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{h(x)} \stackrel{VOAL}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha},$$

$$\text{takže } \int_1^{\pi/2} f \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_1^{\pi/2} h \text{ konverguje}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha - 1 > -1 \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

Protože f je spjatá u 1, plyne odtud, že

$$\int_0^{\pi/2} f \text{ konverguje} \Leftrightarrow \alpha \in (-2, 0).$$

Hodnocení:

konvergence u 0 ... 4

konvergence u $\pi/2$... 4

závěr ... 2

C4

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$u(0,0) = 2, \quad \nabla u(0,0) = (-1, 2)$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(x,y) = \left((1 - \cos y)u(x,y), u(x-y,y), u(xy,y) \right),$$

$$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad G \in C^1(\mathbb{R}^3),$$

$$G'(0,2,2) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = G \circ F$$

Určete $H'(0,0)$, matici, a $D_{\nu} H_2(0,0)$

pro $\nu = (-1, 2)$.

Řešení! Platí $F(0,0) = (0, 2, 2)$.

Zřejmě jsou všechny parciální derivace funkcí F_1, F_2, F_3 spojité, a tedy existuje

F' v každém bodě $[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$

a platí

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} (1-\cos y) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \sin y \cdot u(x,y) + (1-\cos y) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x-y,y) & -\frac{\partial u}{\partial x}(x-y,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x-y,y) \\ y \frac{\partial u}{\partial x}(xy,y) & x \frac{\partial u}{\partial x}(xy,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Dosažením $[x,y] = [0,0]$ dostaneme

$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1+2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Podle věty o derivaci složeného zobrazení je

$$\begin{aligned} H'(0,0) &= (G \circ F)'(0,0) = G'(F(0,0)) \circ F'(0,0) \\ &= G'(0,2,2) \circ F'(0,0) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Tedy $H'(0,0)$ je reprezentována maticí $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Tudiž pro $v = (-1, 2)$ platí

$$\begin{aligned} D_v H_2(0,0) &= H_2'(0,0) \cdot v = (-1, 7) \cdot (-1, 2) \\ &= 1 + 14 = 15 \end{aligned}$$

Hodnocení

$$F(0,0) \quad \dots \quad 1$$

$$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \quad \dots \quad 1$$

C5 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojite!

$$(a) \int_0^{\infty} f \, K \Rightarrow \int_0^{\infty} f(x+2) \, dx \, K$$

(b) \Leftarrow

$$(c) \int_0^{\infty} f \, K \Rightarrow \int_0^{\infty} f^2 \, K$$

Řešení! (a) PLATI!

substituce $y = x+2$, $dy = dx$, $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \infty \\ \hline y & 2 & \infty \end{array}$,

$$\int_0^{\infty} f(x+2) \, dx = \int_2^{\infty} f(x) \, dx.$$

Podle věty o aditivitě Newtonova integrálu
(Věta 7.31 (a)) tvrzení platí!

(b) NEPLATI, proti příklad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 2], \\ \frac{2}{x^2}, & x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Potom f je spojita na $(0, \infty)$, $\int_0^{\infty} f$ diverguje

$$\text{a } \int_0^{\infty} f(x+2) \, dx = \int_2^{\infty} f(x) \, dx \text{ konverguje.}$$

(c) NEPLATI, protipříklad

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{x}}, & x \in (0, 2], \\ \frac{4}{x^2}, & x \in (2, \infty), \end{cases}$$

potom f je spojitá na $(0, \infty)$, $\int_0^{\infty} f$

konverguje, ale

$$(f(x))^2 = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \in (0, 2], \\ \frac{16}{x^4}, & x \in (2, \infty), \end{cases}$$

a tedy $\int_0^{\infty} f(x)^2 dx$ diverguje.

Hodnocení

(a) 2 body

(b) 4 body