Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
25. 6. 2026

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x-5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x) = x(1 - \cos(x))$.
   (a) [3 b.] Rozhodněte, zda existují limity funkce f v $+\infty$ a $-\infty$, a případně určete jejich hodnotu.
   (b) [3 b.] Existuje nějaké $\varepsilon > 0$ takové, že funkce f je rostoucí na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$? (Není zde nutné zjišťovat "optimální" hodnotu ε, stačí jen rozhodnout a zdůvodnit, zda vůbec nějaké takové ε existuje.)
   (c) [4 b.] V kolika bodech má funkce f lokální extrém? V kolika bodech má globální extrém? (Není nutné zde určovat, o které body se jedná, stačí jen určit jejich počet.)

2. (a) [3 b.] Definujte formálně, co to znamená, že posloupnost čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $+\infty$.
   (b) [4 b.] Pro posloupnost čísel $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ uvažujme následující dvě vlastnosti:
   (I) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$
   (II) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\colon b_m > b_n + 1$
   Plyne z vlastnosti (I) vlastnost (II)? Plyne z vlastnosti (II) vlastnost (I)?
   (c) [3 b.] Definujme posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem $c_n = \frac{\exp((-1)^n \cdot n)}{n}$. Rozhodněte, zda má tato posloupnost limitu, a pokud ano, čemu se tato limita rovná.

3. (a) [3 b.] Definujte, co to znamená, že funkce f je *konvexní* na intervalu I.
   (b) [3 b.] Dokažte následující tvrzení: *Jestliže je funkce f ryze konvexní na intervalu I, tak pro každou hodnotu $h \in \mathbb{R}$ existují nejvýše dvě hodnoty $x \in I$ splňující $f(x) = h$.*
   (c) [4 b.] Nechť $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ je nezáporná funkce, která je konvexní na $\mathbb{R}$. Definujme funkci $g(x) = (f(x))^2$. Dokažte, že g je také konvexní na $\mathbb{R}$. Pokud vám to pomůže, můžete navíc předpokládat, že f má na $\mathbb{R}$ vlastní derivace libovolného řádu.

4. (a) [3 b.] Napište definici pojmu *primitivní funkce* a napište, jak je definován Newtonův integrál $(N)\int_A^B f(x)\,dx$.
   (b) [3 b.] Napište vzorec pro výpočet objemu rotačního tělesa.
   (c) [4 b.] Pro $A \in (1, +\infty)$ označme $V(A)$ objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy pod grafem funkce $\frac{1}{x^{3/2}}$ na intervalu $[1, A]$ kolem osy x. Čemu se rovná $\lim_{A\to+\infty} V(A)$?