

I. MECHANIKA

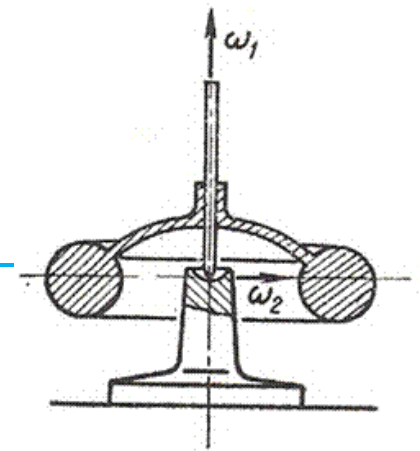
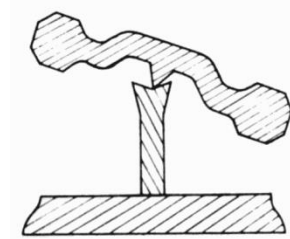
5. Otáčení tuhého tělesa III



Obsah

- setrvačníky
- volný setrvačnick
 - kulový setrvačnick
 - symetrický setrvačnick
 - asymetrický setrvačnick
- volná osa rotace, stabilita
- těžký setrvačnick
- principy využití setrvačnicků
- gyroskopický efekt

Setrvačníky



asymetrický

$$J_1 \neq J_2, \quad J_2 \neq J_3, \quad J_1 \neq J_3$$

symetrický

$$J_1 = J_2 \neq J_3,$$

kulový

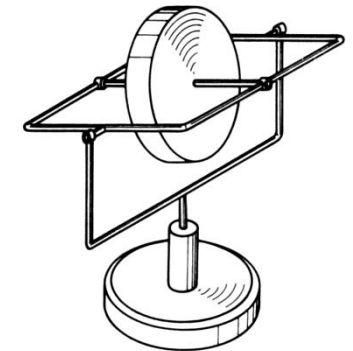
$$J_1 = J_2 = J_3 = J$$

setrvačník hovorově

$$J_1 = J_2 \ll J_3$$

setrvačník volný (bezsilový)

nulové vnější silové působení
upevnění v hmotném středu



Kardanův závěs

- upevnění se 3 stupni volnosti
- osy musí být navzájem aspoň přibližně kolmé
- animace ukazuje i situace se sníženým počtem stupňů volnosti (všechny obruče v rovině → rotace vnější obruče v této rovině se přenáší až na osu setrvačníku)



„Gyroscope operation“. Licencováno pod Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gyroscope_operation.gif#mediaviewer/File:Gyroscope_operation.gif

těžký setrvačník

upevnění mimo hmotný střed
v tíhovém poli

Řešení Eulerových rovnic

Volný kulový setrvačnick

- Eulerovy rovnice pro volný setrvačnick

$$J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (J_3 - J_2)\Omega_2\Omega_3 = 0$$

$$J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (J_1 - J_3)\Omega_1\Omega_3 = 0$$

$$J_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (J_2 - J_1)\Omega_1\Omega_2 = 0$$

- koule nebo krychle

$$J_1 = J_2 = J_3 = J$$

- Eulerovy rovnice pro kulový setrvačnick

$$\left. \begin{array}{l} J \frac{d\Omega_1}{dt} = 0 \\ J \frac{d\Omega_2}{dt} = 0 \\ J \frac{d\Omega_3}{dt} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Omega_i = \text{konst.}$$

Řešení Eulerových rovnic

Volný kulový setrvačnick

v tělese:

- úhlová rychlost je konstantní – stálý směr osy rotace i velikost úhlové rychlosti

- moment hybnosti

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= J \Omega_1 \\ \beta_2 &= J \Omega_2 \\ \beta_3 &= J \Omega_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{B} = J\vec{\omega}$$

v i.s.s. (v prostoru):

- rovnice mezi vektory platí v každé s.s. $\vec{B} = J\vec{\omega}$
- 2. impulsová věta pro bezsilový setrvačnick $\frac{d}{dt}\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{konst.}$
- úhlová rychlost je konstantní – stálý směr osy rotace i velikost úhlové rychlosti
- vůči všem osám je stejný moment setrvačnosti, a tedy také kinetická energie \Rightarrow rotace kolem libovolné osy je z energetického hlediska indiferentní

Závěr: Volný kulový setrvačnick rotuje kolem libovolné osy stálou úhlovou rychlostí. Osa rotace zachovává v prostoru i v tělese stálou polohu. Poloha osy rotace v tělese není stabilní.

Řešení Eulerových rovnic

Volný symetrický setrvačnick

- osa rotační symetrie
- Eulerovy rovnice pro volný setrvačnick
- pro třetí složku vychází
- upravíme první dvě rovnice
- zavedli jsme parametr (rozměrově úhlová rychlost)

$$J_1 = J_2 \neq J_3$$

$$J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (J_3 - J_1)\Omega_2\Omega_3 = 0$$

$$J_1 \frac{d\Omega_2}{dt} + (J_1 - J_3)\Omega_1\Omega_3 = 0$$

$$J_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = 0$$

$$\Omega_3 = \text{konst.}$$

$$\frac{d\Omega_1}{dt} + \underbrace{\frac{J_3 - J_1}{J_1}\Omega_3}_{\Omega}\Omega_2 = 0$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} - \underbrace{\frac{J_3 - J_1}{J_1}\Omega_3}_{\Omega}\Omega_1 = 0$$

$$\Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1}\Omega_3$$

Řešení Eulerových rovnic

Volný symetrický setrvačník

- dostaneme

$$\frac{d\Omega_1}{dt} + \Omega\Omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_2 = -\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{1}{\Omega} \frac{d^2\Omega_1}{dt^2}$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} - \Omega\Omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 = \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{1}{\Omega} \frac{d^2\Omega_2}{dt^2}$$
- dosazení z 3. sl. do 1. sl.

$$\frac{d^2\Omega_1}{dt^2} + \Omega^2\Omega_1 = 0$$

$$\frac{d^2\Omega_2}{dt^2} + \Omega^2\Omega_2 = 0$$
- řešení

$$A \sin(\Omega t + \alpha) \text{ nebo } B \cos(\Omega t + \beta)$$
- budiž

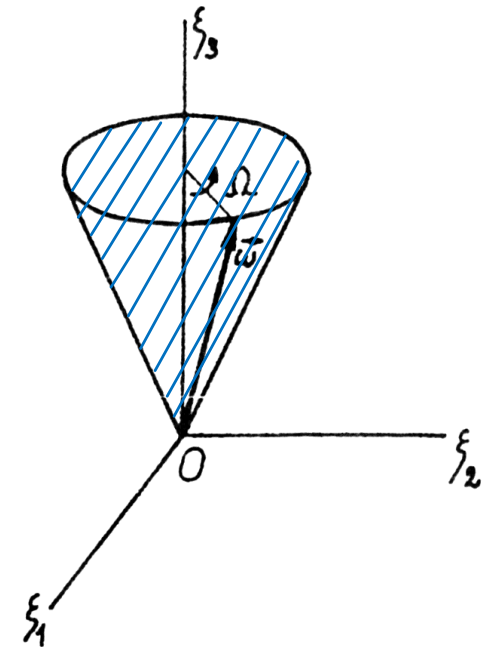
$$\Omega_1 = A \sin(\Omega t + \alpha)$$
- pak

$$\Omega_2 = -\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega_1}{dt} \Rightarrow$$

$$\Omega_2 = -A \cos(\Omega t + \alpha)$$
- spolu s

$$\Omega_3 = \text{konst.}$$
- velikost úhlové rychlosti

$$\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2} = \text{konst.}$$



Řešení Eulerových rovnic

Volný symetrický setrvačník

v tělese:

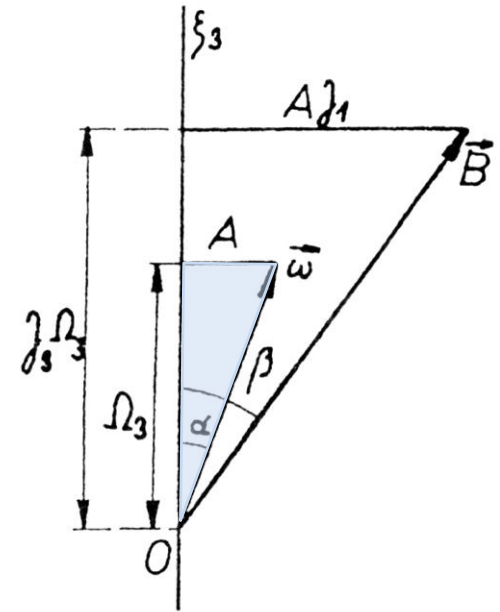
⇒ úhlová rychlost v tělese opisuje kužel (**polhodiový kužel**) s úhlovou rychlostí Ω (rychlost **nutace** osy otáčení **v tělese**)

- moment hybnosti

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= J_1 \Omega_1 \\ \beta_2 &= J_1 \Omega_2 \\ \beta_3 &= J_3 \Omega_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$$

- ⇒ ξ_3 , \vec{B} a $\vec{\omega}$ leží v rovině, tj. vektor \vec{B} v tělese opisuje synchronně s vektorem $\vec{\omega}$ kužel s obecně jiným vrcholovým úhlem

- $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{J_1}{J_3}$ (pro $J_1 = J_3 \Rightarrow$ kulový setrvačník, kde $\vec{B} \parallel \vec{\omega}$)



Řešení Eulerových rovnic

Nutace volného symetrického setrvačníku

v i.s.s. (v prostoru):

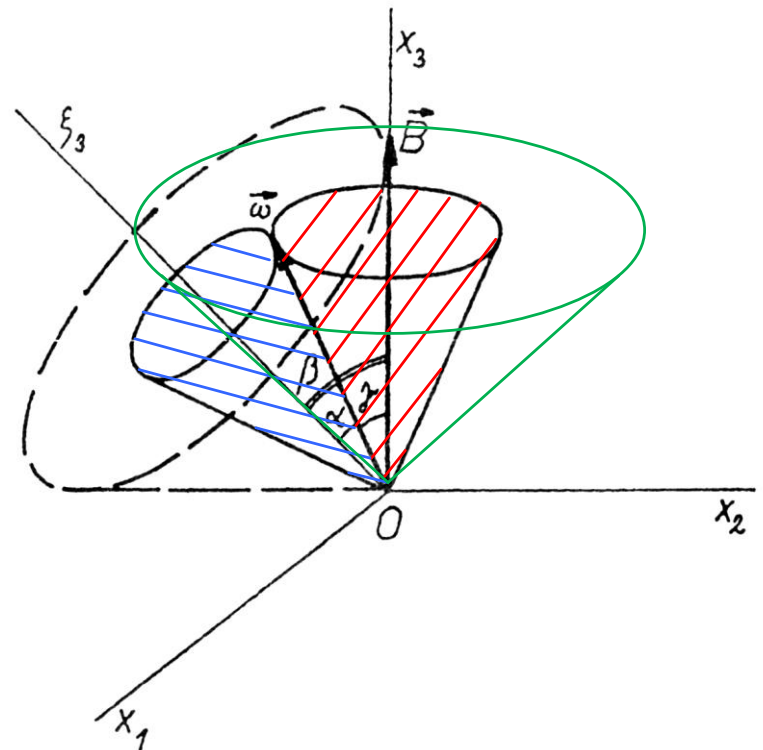
- 2. impulsová věta pro bezsilový setrvačník $\frac{d}{dt} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{konst.}$

- \Rightarrow osa symetrie setrvačníku ξ_3 se otáčí kolem nehybného \vec{B} úhlovou rychlostí Ω_p a opisuje **nutací** kužel (**nutace**)

- lze odvodit $\Omega_p = \frac{B}{J_1} \doteq \Omega \frac{J_3}{|J_3 - J_1|}$

- nutaci lze názorně popsat jako odvalování v tělese pevného **polhodiového kužele** po **herpolhodiovém kuželi** pevném v prostoru

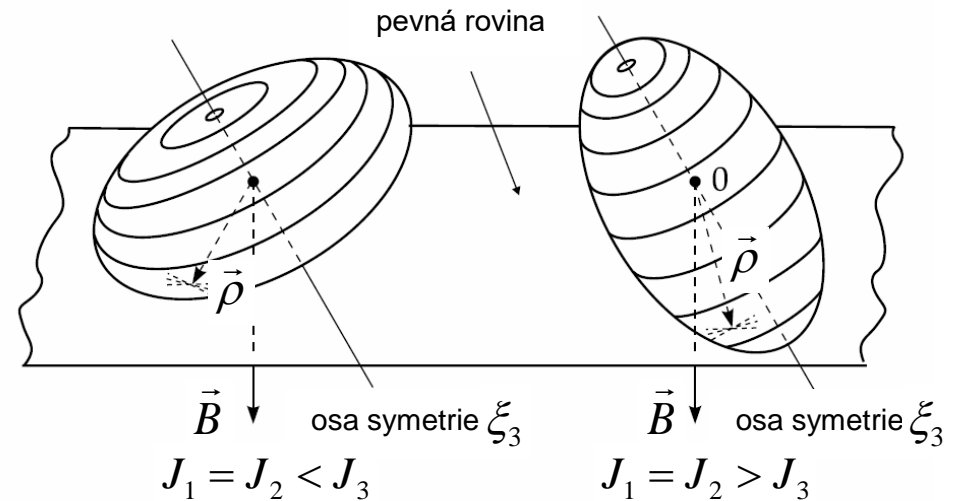
- polhodiový kužel
 - vrcholový úhel 2α
- herpolhodiový kužel
 - vrcholový úhel $2\gamma = 2\beta - 2\alpha$



Shrnutí volného symetrického setrvačníku

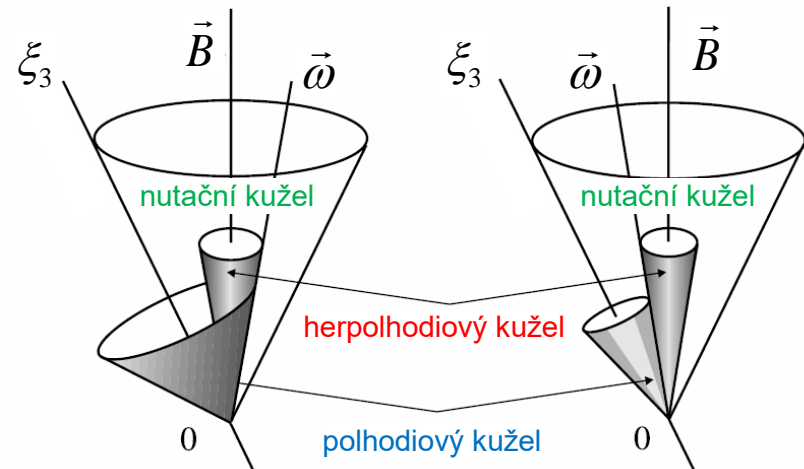
zploštělý elipsoid setrvačnosti

- $J_1 = J_2 < J_3$
- herpolhodiový kužel leží uvnitř polhodiového kužele
- pořadí vektorů $\xi_3 - B - \omega$



protáhlý elipsoid setrvačnosti

- $J_1 = J_2 > J_3$
- herpolhodiový kužel leží vně polhodiového kužele
- pořadí vektorů $\xi_3 - \omega - B$



Volný symetrický setrvačnick

Rotace kolem volné osy

roztočíme symetrický setrvačnick ($J_1 = J_2 \neq J_3$) podle hlavní osy setrvačnosti procházející hmotným středem a pak ho necháme volně (bez působení sil) rotovat

- 1) rotace kolem osy symetrie
- 2) rotace kolem osy kolmé k ose symetrie (všechny takové osy jsou hlavní osy a jsou rovnocenné)

úhlová rychlost $\vec{\omega}$ v tělese rovnoběžná s vektorem momentu hybnosti $\vec{B} \Rightarrow$ totéž platí pro oba vektory v libovolné soustavě, tedy i v i.s.s. (v prostoru)

Závěr: Při roztočení symetrického setrvačnicku kolem hlavní osy se poloha této osy v tělese i v prostoru udržuje – jde o tzv. volnou osu.

Volný symetrický setrvačník

Stabilita rotace kolem volné osy

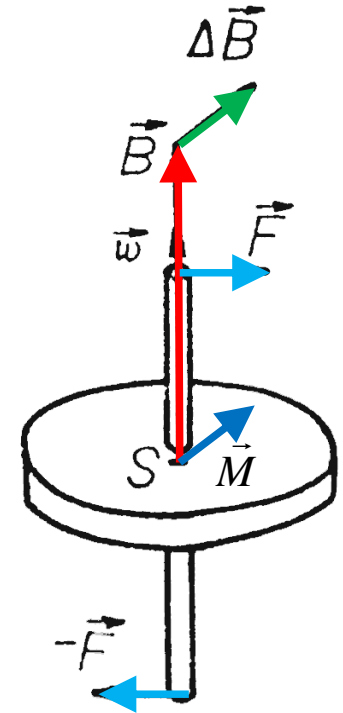
Stabilita rotace (symetrického) setrvačníku kolem volných os

výchozí stav

- osa stálá v tělese i v prostoru má směr vektoru \vec{B}
- moment síly \vec{M} (např. dvojice sil podle obrázku) kolmý k \vec{B}
- 2.IV $\Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}$

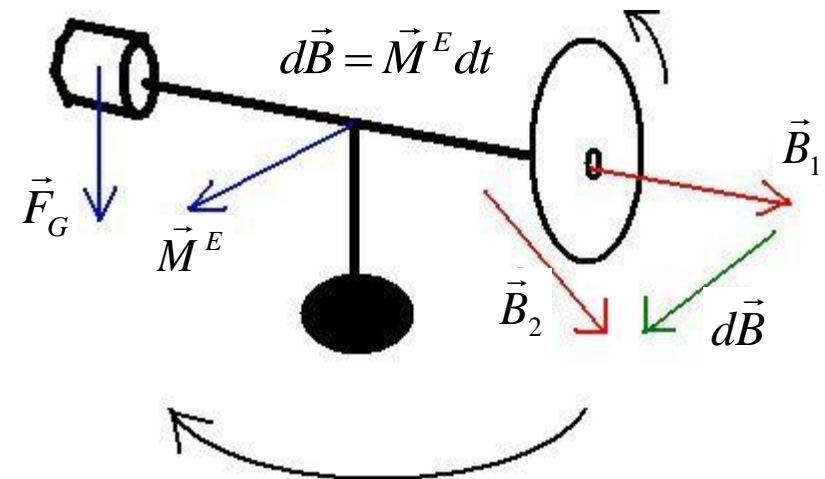
pro krátkodobé působení

- lze psát $\Delta\vec{B} = \vec{M}\Delta t$
- přírůstek $\Delta\vec{B}$ nemění velikost momentu hybnosti
- $\Delta\vec{B}$ mění pouze směr vektoru \vec{B}
- protože $\vec{\omega} \times \vec{B} = 0$, bude změna momentu hybnosti v prostoru i v tělese stejná
 \Rightarrow na konci působení sil nebude moment hybnosti mít směr volné osy (a osa rotace bude konat nutační pohyb kolem vektoru momentu hybnosti)



Stáčení osy setrvačníku momentem sil. Precese setrvačníku.

- vyvážení hmotnosti setrvačníku
- roztočení setrvačníku
- vektor momentu hybnosti \vec{B}_1 setrvačníku je orientován souhlasně s osou rotace
- posun závaží doleva \Rightarrow na rameno působí síla \vec{F}_G , což vyvolá moment síly \vec{M}^E
- impuls momentu síly je podle 2. IV roven změně momentu hybnosti
- ta se projeví stáčením osy rotace setrvačníku kolem svislé osy
- stáčení osy setrvačníku vlivem vnějšího momentu sil se nazývá precese



Volný symetrický setrvačnick

Stabilita rotace kolem volné osy

- porovnáme kinetickou energii setrvačnicku před a po působení poruchy (vychylujícího impulsu momentu síly)
- předpokládáme, že velikost momentu hybnosti se nezmění

1) rotace kolem osy symetrie

$$\begin{array}{l} \beta_1 = 0 \\ \text{na počátku } \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = J_3 \Omega_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B^2 = J_3^2 \Omega_3^2 \\ E_k = \frac{1}{2} J_3 \Omega_3^2 \end{array} \Rightarrow 2J_3 E_k = B^2$$

$$\begin{array}{l} \beta_1 = J_1 \Omega'_1 \\ \text{na konci } \beta_2 = J_1 \Omega'_2 \\ \beta_3 = J_3 \Omega'_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B^2 = J_1^2 (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2) + J_3^2 \Omega_3'^2 \\ E'_k = \frac{1}{2} J_1 (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2) + \frac{1}{2} J_3 \Omega_3'^2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} B^2 = J_1^2 (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2) + J_3^2 \Omega_3'^2 \\ 2J_3 E'_k = J_1 J_3 (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2) + J_3^2 \Omega_3'^2 \end{array} \Rightarrow 2J_3 E'_k = B^2 + J_1 (J_3 - J_1) (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2)$$

Volný symetrický setrvačnick

Stabilita rotace kolem volné osy

před působením poruchy

$$2J_3 E_k = B^2$$

po působení poruchy

$$2J_3 E'_k = B^2 + J_1 (J_3 - J_1) (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2)$$

K.E. setrvačnicku na počátku a na konci $E'_k = E_k + \frac{J_1 (J_3 - J_1)}{2J_3} (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2)$

$J_3 > J_1 \Rightarrow E'_k > E_k$... vnější síly musí vykonat kladnou práci

rotace stabilní

$J_3 < J_1 \Rightarrow E'_k < E_k$... vnější síly vykonají zápornou práci

rotace nestabilní

2) rotace kolem osy kolmé k ose symetrie (všechny takové osy jsou hlavní osy)
analogicky

$J_3 < J_1 \Rightarrow E'_k > E_k$... vnější síly musí vykonat kladnou práci

rotace stabilní

$J_3 > J_1 \Rightarrow E'_k < E_k$... vnější síly vykonají zápornou práci

rotace nestabilní

rotace kolem hlavní osy je stabilní, pokud jí příslušný moment setrvačnosti je větší než ostatní hlavní momenty

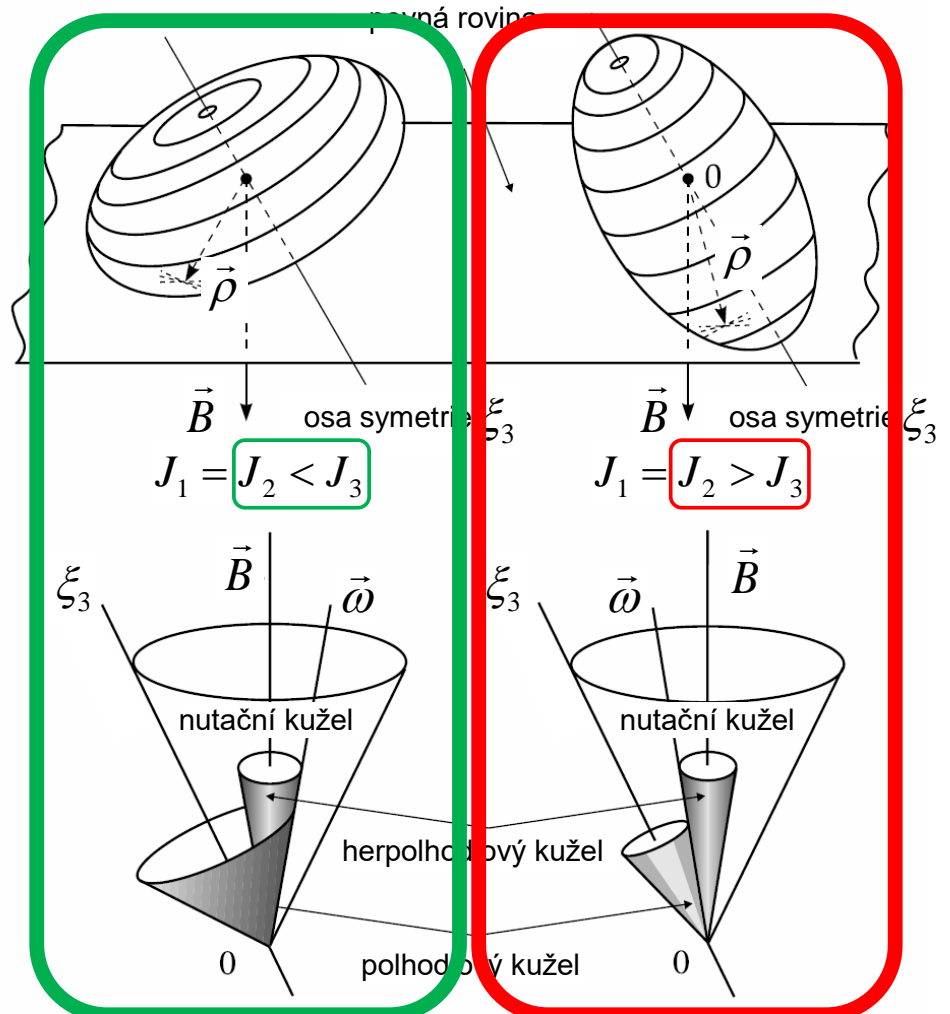
symetrický setrvačnick \Rightarrow všechny osy kolmé k ose symetrie rovnocenné
 \Rightarrow poloha osy v rovině kolmé k ose symetrie je energeticky indiferentní

Volný symetrický setrvačník

Stabilita rotace kolem volné osy

Shrnutí předchozích výsledků

- symetrický setrvačník při rotaci kolem hlavních os zachovává směr osy rotace (nekoná nutační pohyb) \Rightarrow hlavní osy jsou volnými osami rotace
- z energetického hlediska je stabilní volná rotace kolem té hlavní osy, jíž přísluší větší hodnota momentu setrvačnosti



Samovolné ustavení stabilní osy rotace

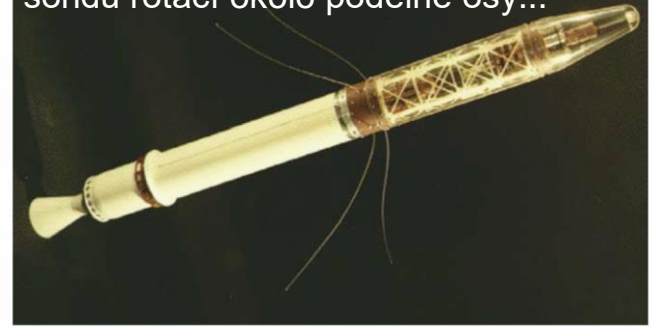
experiment → rotující těleso libovolného tvaru vlivem náhodného vnějšího působení přejde v rotaci kolem hlavní osy setrvačnosti, vůči které má největší moment setrvačnosti

důsledek teorémů o stabilitě (Thomson-Tait-Četajev) ⇒ systém s nestabilní potenciální energií, který je stabilizován pomocí gyroskopických sil, přestává být stabilním po přidání libovolně malé disipativní síly

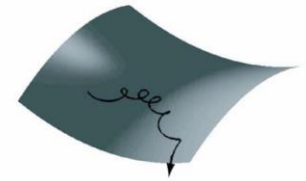
- a) stabilní (sudý počet nestabilních parametrů)
- b) nestabilní (lichý počet nestabilních parametrů)
- c) systém stabilizovaný gyroskopicky se doplněním disipativní síly destabilizuje
- d) dokonce systém v minimu potenciální energie se může doplněním disipativní síly destabilizovat

R.Kretchenikov, J.E.Marsden: *Dissipation-induced instabilities in finite dimensions*, Rev. Mod. Phys. **79** (2007) 519.

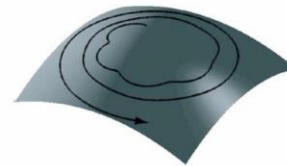
Explorer 1 – záměrem bylo stabilizovat sondu rotací okolo podélné osy...



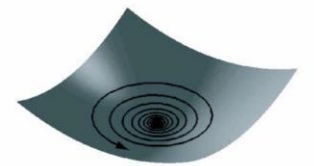
(a) Gyroscopic stabilization: even degree of instability



(b) Gyroscopic failure: odd degree of instability



(c) Dissipative destabilization of gyroscopically stable system



(d) Nonconservative positional destabilization of potentially stable system

Zajímavé aplikace

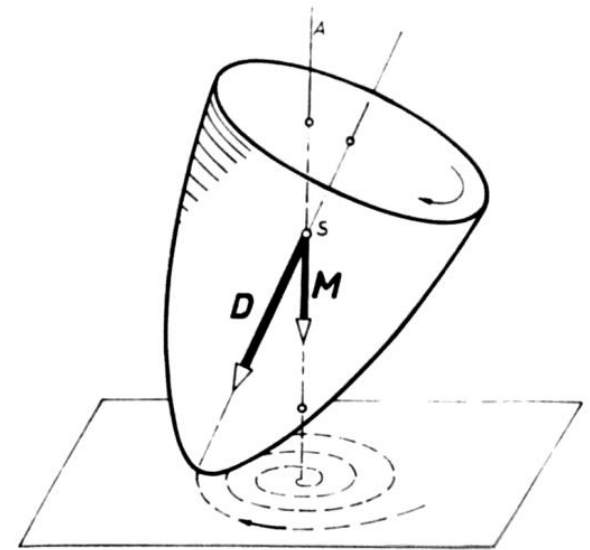
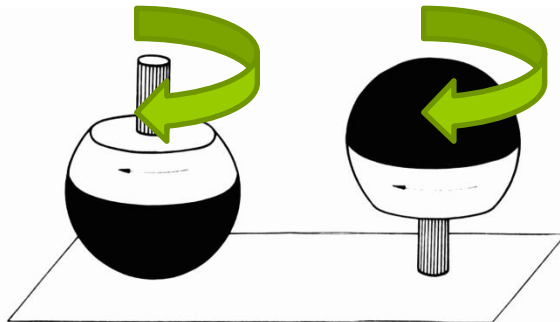
- teoremy Thomson-Tait-Četajev
- významný podíl třecích sil

káča, vlček, čamrda

- stabilizace díky tření hrotu
- po spirále se blíží do stabilního stavu
- zároveň třecí síla stabilitu narušuje
- nakonec vlček zpomalí natolik, že ztratí stabilitu

tippe top

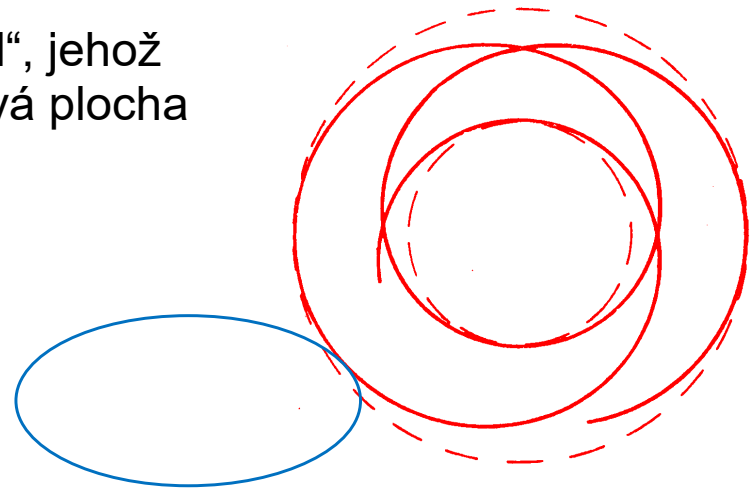
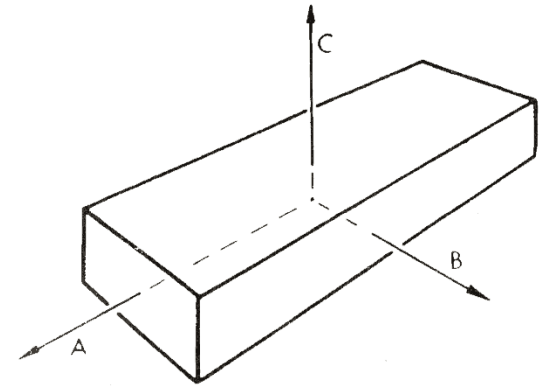
- hmotný střed neleží v centru kulové části
- dotykový bod s podložkou leží mimo osu rotace
- tření vytvoří moment sil vedoucí nakonec k obrácení



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snurra_uppochner.gif

Volný asymetrický setrvačník

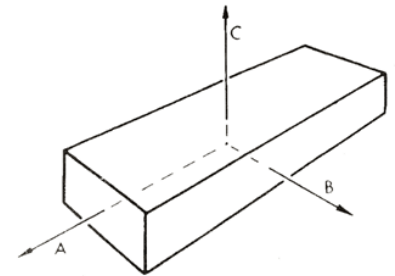
- nejen tělesa obecného tvaru, ale třeba i kvádr
- hlavní momenty $J_1 < J_2 < J_3$
- uplatní se opět odvalování **polhodiového kužele po herpolhodiovém**
 - **polhodiový kužel** → eliptický
 - **herpolhodiový kužel** → „kužel“, jehož obecně neuzavřená povrchová plocha protíná samu sebe



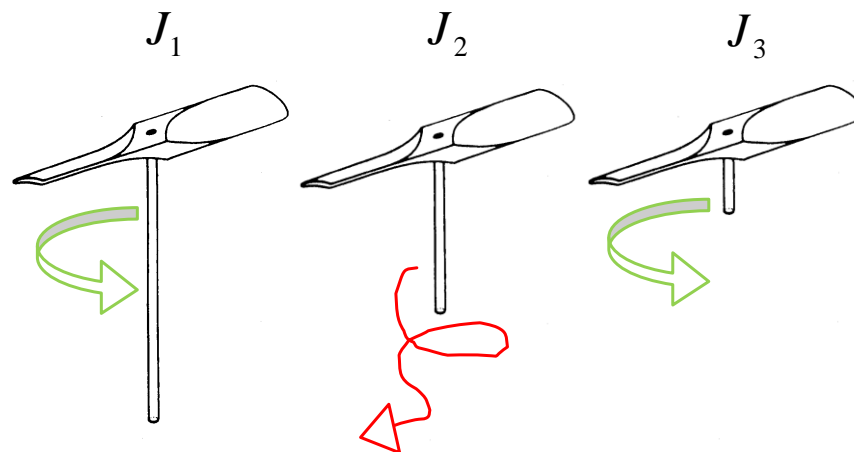
Volný asymetrický setrvačník

Stabilita rotace kolem volné osy

- opět platí, že hlavní osy jsou zároveň volnými osami rotace
- z energetického hlediska je stabilní rotace kolem hlavní osy pro
 - největší moment setrvačnosti
 - nejmenší moment setrvačnosti
- příklad: volná rotace kvádrů kolem osy B vždy nestabilní
- příklad: jednolistá vrtulka s hřídelkou – čím delší hřídel, tím menší moment setrvačnosti vzhledem k ose symetrie



$$J_1 < J_2 < J_3$$



Tuhé těleso při nulové výslednici vnějších sil a nulovém momentu vnějších sil

Jak se tedy pohybuje tuhé těleso, pro něž výslednice vnějších sil a výsledný moment vnějších sil jsou nulové?

- těleso je v rovnováze
- zůstává v předchozím stavu
 - hmotný střed v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu
 - kolem hmotného středu může těleso konat
 - některý z rozebraných pohybů volného symetrického setrvačnicku nebo
 - v obecném případě (hlavní momenty různé) pohyb volného asymetrického setrvačnicku

Těžký setrvačnick

Statická a dynamická stabilita

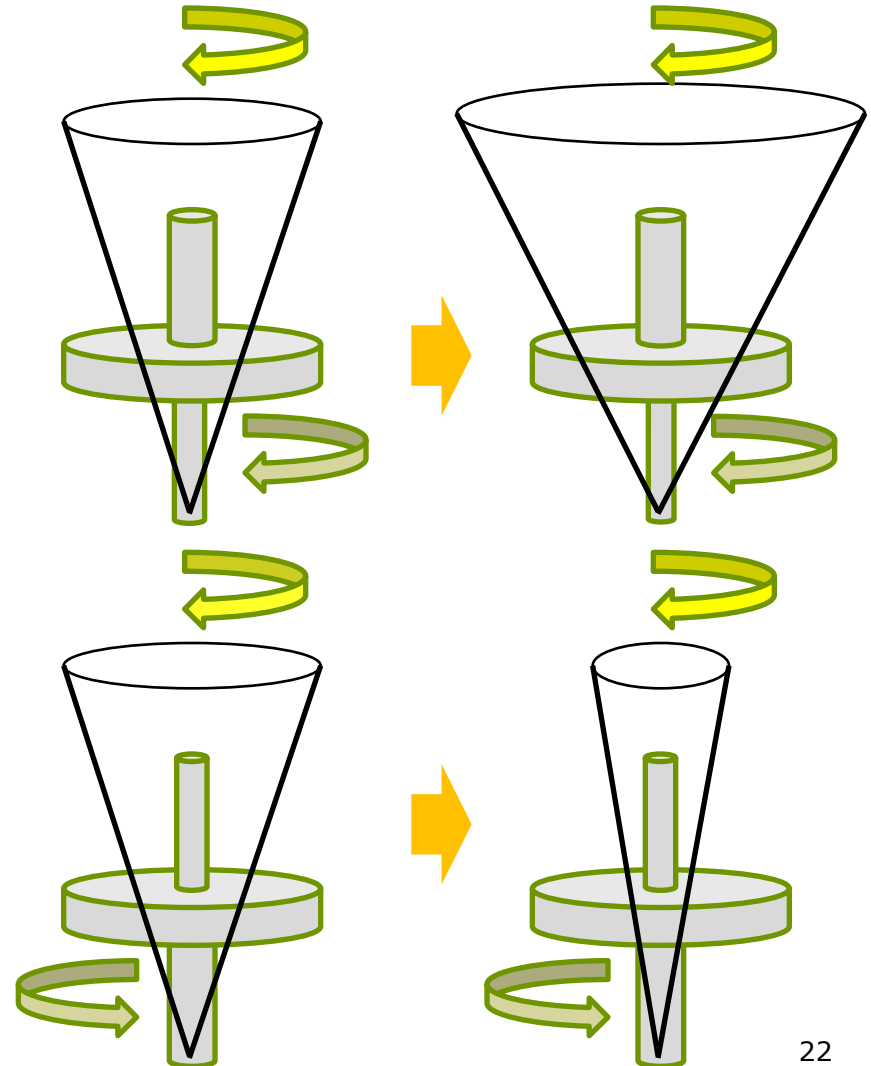
- setrvačnick v Kardanově závěsu
- hmotný střed mimo centrum závěsu
- vnější moment sil → precese

dynamická rovnovážná poloha

- hmotný střed nad centrem
- precese ve směru rotace setrvačnicku
- precesní kužel se rozšiřuje s časem kvůli ztrátám
- nakonec se setrvačnick převrátí

statická rovnovážná poloha

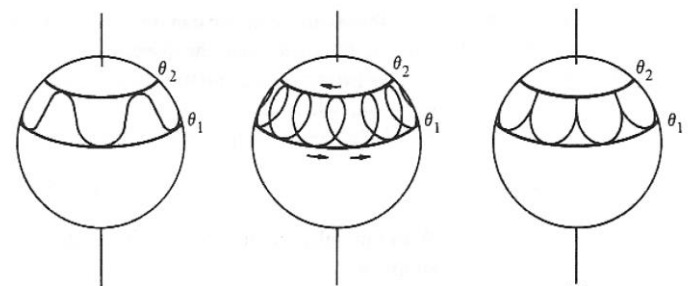
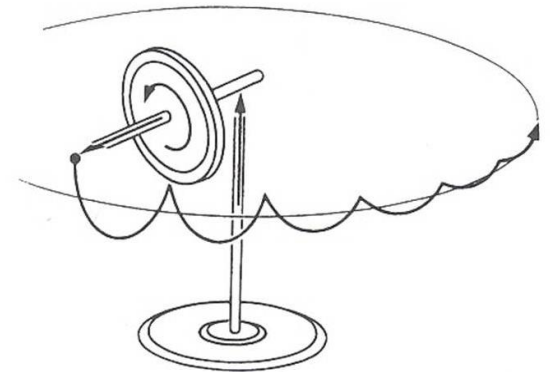
- hmotný střed pod centrem
- precese proti směru rotace setrvačnicku
- precesní kužel se zužuje s časem kvůli ztrátám
- nakonec setrvačnick zastaví a zůstane ve stabilní poloze



Těžký setrvačník

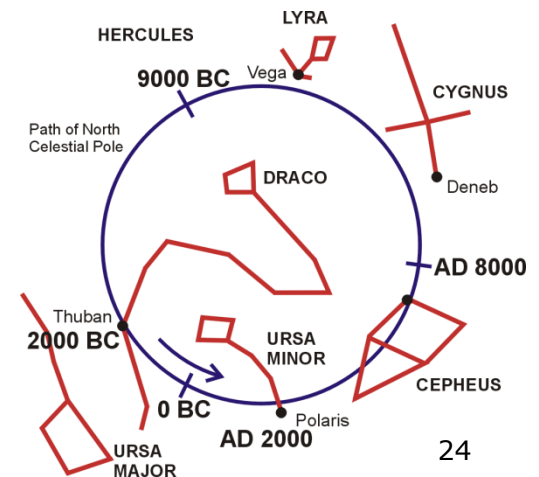
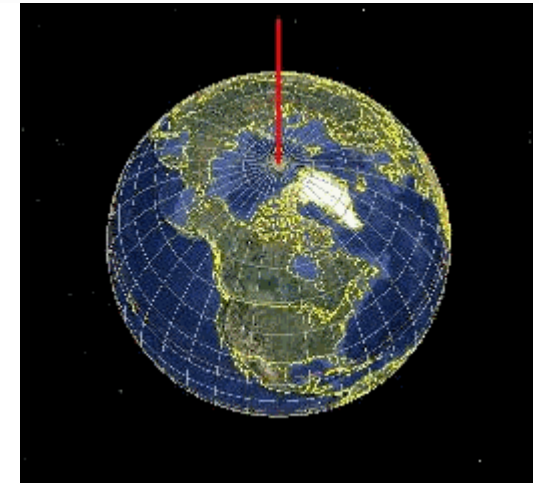
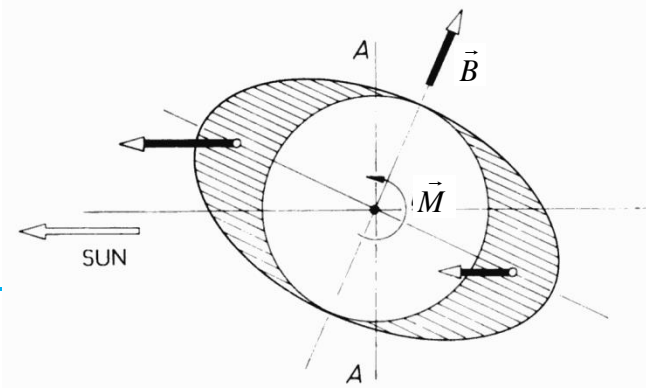
Precese a nutace

- osa symetrie setrvačníku ξ_3 vykonává nutaci kolem vektoru momentu hybnosti
- při vysokých otáčkách těžký setrvačník často koná tzv. pseudoregulární precesi, kdy je nutace sice přítomná, ale prakticky nepozorovatelná
- pokud nutace vymizí, jde o tzv. regulární precesi
- rozdíl podstatný v technických aplikacích: po uvolnění dříve upevněné osy se např. může projevit nutace, která předtím byla prakticky nepozorovatelná
- při nižších otáčkách setrvačník koná složitější pohyb: precese a nutace se skládají – na kulové ploše se pohyb osy zobrazí jako cykloida



Precese a nutace Země

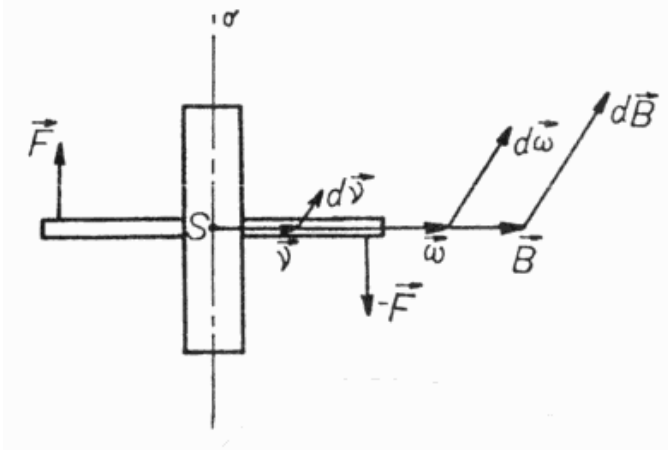
- Země má volnou osu
 - nejde ale o volný setrvačnick – nerotuje bezsilově
 - slapové síly působí na zploštění planety
 - složení gravitačních vlivů Slunce, Měsíce a planet
 - moment sil \vec{M} kolmý k nákresně
 - změna momentu hybnosti \vec{B} kolmá k nákresně
- ⇒ precese vektoru \vec{B} kolem osy A-A
- osa A-A kolmá k ekliptice, míří do souhvězdí Draka
 - doba oběhu cca 25800 let
- nutace
 - perioda 433 dnů (Chandlerova perioda)
 - amplituda $\pm 0.2''$
 - posun pólu po kružnici průměru 10 m



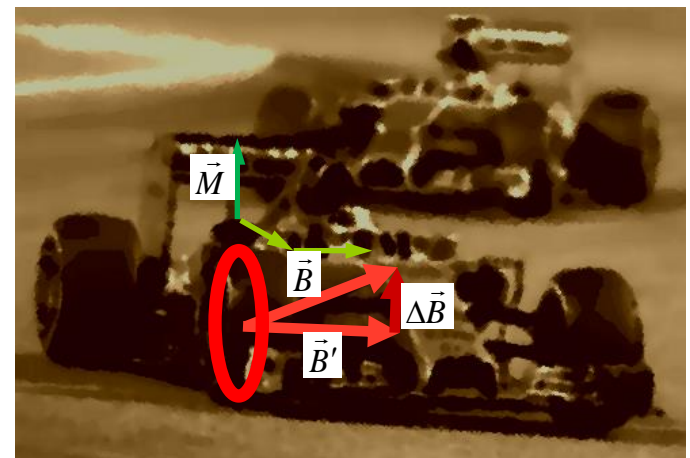
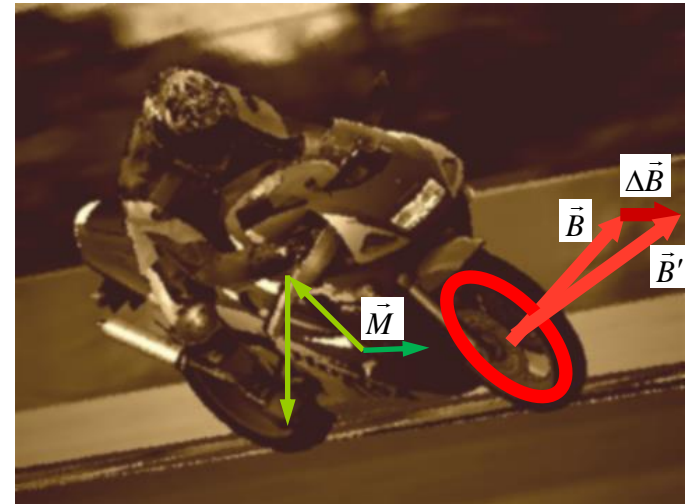
By Ereenegee (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Precesi%C3%B3n.gif>

By Miraceti, original authors: GregBenson and Wereon. [GFDL (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>) or CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons
http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3APrecession_starchart.png

Gyroskopický efekt – stabilita v zatáčce



- rotující součásti vozidel ovlivňují stabilitu při zatáčení
- gyroskopický efekt udržuje stabilitu při naklánění do zatáčky
- vozidla, která se nenaklánějí, jsou naopak vyklápěna ven ze zatáčky
- gyrobus – protiběžné setrvačníky



Gyroskopický efekt – navigační přístroje...

- prostý Kardanův závěs nemusí stačit pro otáčení ve velkém rozsahu (zejména v letadlech)
- uplatňuje se setrvačnost otočných částí závěsu (vs. robustnost konstrukce)

směrový ukazatel (heading indicator)

- volný setrvačník – drží pevný směr ($\Delta > 0.002^\circ/\text{min}$)
- ovlivňován rotací Země \Rightarrow každých 15 minut nutno korigovat směr podle kompasu

umělý horizont

- těžký setrvačník ve stabilní rovnováze
- osa udržuje „střední hodnotu“ svislého směru

gyrokompas

- osa udržována ve vodorovném směru
- interakce \vec{B} s rotací Země $\vec{\omega}_e$ udržuje směr k severu (nefunguje na pólech)

gyrostat

- tlumí pohyby paluby lodi při vlnobití

