

Jméno:

1	2	3	4	$\Sigma$

---

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I  
26. 5. 2025

---

Čas: 90 minut.

- Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.
- Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.
- Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.
- Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.
- Svě odpovědi musíte zdůvodnit.
- Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.

---

1. Uvažujme funkci  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou vzorcem  $f(x) = |x^2 - 1|(x + 1)$ .

- (a) [3 b.] V kterých bodech  $\mathbb{R}$  má tato funkce vlastní derivaci?
- (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž tato funkce nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
- (c) [4 b.] Najděte co největší otevřený interval  $I$  obsahující nulu, na němž je tato funkce konvexní nebo konkávní, a uveďte, zda je  $f$  na  $I$  konvexní, nebo zda je tam konkávní.

2. (a) [3 b.] Definujte, co je *hromadný bod*, co je *limes superior* a co je *limes inferior* posloupnosti  $(a_n)$ .

(b) [3 b.] Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé:

“Jestliže  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou dvě posloupnosti takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n \leq b_n$ , tak potom

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.”$$

(c) [4 b.] Definujme

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^3 + 3n}{n^3 + 5}.$$

Určete limes superior a limes inferior posloupnosti  $(a_n)$ .

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definován *Taylorův polynom řádu  $n$  funkce  $f$  v bodě  $A$* .

(b) [3 b.] Zformulujte větu, která charakterizuje Taylorův polynom pomocí limity. Nemusíte tu větu dokazovat.

(c) [4 b.] Určete, pro jaké přirozené číslo  $k \in \mathbb{N}$  je následující limita vlastní a nenulová:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot (\cos(x) - 1)}{x^k}.$$

Jaká je pro toto  $k$  hodnota té limity?

4. (a) [3 b.] Napište, co je to *primitivní funkce* a jak je definován *Newtonův integrál*  $(N) \int_A^B f(x) dx$ .

(b) [3 b.] Napište vzorec pro výpočet povrchu pláště rotačního tělesa vzniklého otáčením grafu nezáporné funkce  $f$  na intervalu  $[A, B]$  kolem osy  $x$ .

(c) [4 b.] Nechť  $U$  je úsečka v rovině, jejíž jeden krajní bod má souřadnice  $(0, 2)$  a druhý krajní bod má souřadnice  $(1, 4)$ . Jaký povrch má plášť rotačního tělesa vzniklého otáčením úsečky  $U$  kolem osy  $x$ ?