Lineární algebra II (pro fyziky)

Tenzory

Dalibor Šmíd

MFF UK

Na jednoduchou otázku „Co je to tenzor?“ není jednoduchá odpověď:

- pro informatika je to zobecněná matice (s více než 2 indexy)
- pro fyzika je to spíš zobecněný vektor (s více než jedním indexem). Typický první příklad je tenzor setrvačnosti, což je vlastně spíš kvadratická forma (vlastní vektory = hlavní osy, vlastní čísla = hlavní momenty). Obvyklá definice bývá „objekt reprezentovaný vůči bázi zobecněnou maticí s n indexy, splňující určité transformační vlastnosti při přechodu do jiné báze“. Báze bývají ortonormální (tj. matice přechodu ortogonální). Tenzor je často funkcí polohy v prostoru, tj. je to vlastně *tenzorové pole*.
- v matematice je několik různých přístupů k definici tenzoru. My zvolíme ten, v němž je to určitý druh zobrazení. Objekty, které jsme už potkali (vektory, endomorfismy, bilineární formy) budou pak speciálními případy tenzorů. Budeme mluvit o algebraických vlastnostech tenzorů, tedy nikoli o tenzorových polích.

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Lineární zobrazení $\phi : V \to \mathbb{F}$ se nazývá *lineární forma*. Je-li $B = (v_i)_1^n$ báze V,

- $(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)) = [\phi]_B^{K_1} =: [\phi]_B$ je řádkový vektor ($1 \times n$ matice) reprezentující ϕ vůči B, tedy $\phi(v) = [\phi]_B [v]^B$.
- Prostor $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ všech lineárních forem na V se nazývá *duální prostor k V* a značí se V^*.
- Posloupnost $B^* := (\phi^i)_1^n \subset V^*$, kde $[\phi^i]_B = \mathbf{e}_i^T$ (či alternativně $\phi^i(v_j) = \delta_j^i$), se nazývá *duální báze* k B.

Příklady

- $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi((x_1, x_2)^T) = 2x_1 - 5x_2$
- $\phi : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $\phi(A) = \mathrm{Tr}\, A$
- $\phi : P(x, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\phi(p) = p(0)$
- $\phi : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\phi(f) = \int_0^1 f(x) dx$

Lineárním formám se říká též *lineární funkcionály* či *kovektory*.

Nechť $B = (e_i)_1^n$, $B' = (e'_i)_1^n$ jsou dvě báze V, $v \in V$, $R = [\mathrm{Id}]^B_{B'}$. Reprezentace vektoru a její změnu při změně báze jsme značili

$$[v]^B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, [v]^{B'} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}, \quad v_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} v'_j, \quad e'_i = \sum_{j=1}^n r_{ji} e_j$$

V tenzorovém počtu se zavádí několik konvencí: indexy souřadnic vektorů se píší nahoře, řádkový index matice přechodu také, vynechává se suma při sčítání přes index vyskytující se jednou v horní a jednou v dolní poloze.

$$v = v^i e_i = v'^i e'_i, \quad v^i = R^i_j v'^j, \quad e'_i = R^j_i e_j$$

Prostřední vztah lze přepsat jako $v'^j = (R^{-1})^j_i v^i$.

Prvky duálních bází B^*, B'^* značíme $e^1, \dots, e^n$, resp. $e'^1, \dots, e'^n$, tedy $e^i(e_j) = \delta^i_j$, $e'^i(e'_j) = \delta^i_j$. Platí tudíž

$$e^i(v) = e^i(v^j e_j) = v^j e^i(e_j) = v^j \delta^i_j = v^i$$

a podobně $e'^i(v) = v'^i$, platí proto $e^i = R^i_j e'^j$. Reprezentace $\alpha \in V^*$ je pak $\alpha = \alpha_i e^i$, kde $\alpha_i = \alpha(e_i)$. Platí

$$\alpha'_i = \alpha(e'_i) = \alpha(R^j_i e_j) = R^j_i \alpha(e_j) = R^j_i \alpha_j$$

Odvozené transformační vztahy můžeme shrnout do tabulky:

Objekt	**maticově**	**tenzorově**
prvky báze V	$e'_i = \sum_j e_j R_{ji}$	$e'_i = R^j_i e_j$
prvky báze V^*	$e'^i = \sum_j (R^{-1})_{ij} e^j$	$e'^i = (R^{-1})^i_j e^j$.
souř. vektoru	$([v]^{B'})^T = ([v]^B)^T (R^{-1})^T$	$v'^i = (R^{-1})^i_j v^j$
souř. kovektoru	$[\alpha]_{B'} = [\alpha]_B R$	$\alpha'_i = R^j_i \alpha_j$

Říkáme, že prvky báze V a souřadnice kovektoru se transformují *kovariantně*, zbylé dva objekty *kontravariantně*. Matice $(R^{-1})^T =: R^{-T}$ se nazývá matice *kontragredientní* k R.

Definice

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to \mathbb{F}$, $g : Y \to \mathbb{F}$ dvě funkce na těchto množinách. Jejich *tenzorovým součinem* rozumíme funkci

$$\begin{aligned} f \otimes g &: X \times Y \to \mathbb{F} \\ &: (x, y) \mapsto f(x)g(y) \end{aligned}$$

Uvažujme lineární formy $\alpha, \beta \in V^*$, pak $\alpha \otimes \beta$ je zobrazení z $V \times V$ do $\mathbb{F}$ lineární v obou argumentech, tedy bilineární forma. $\beta \otimes \alpha$ je obecně jiná bilineární forma (tj. tenzorový součin není komutativní). Je ale asociativní ♣, tedy má smysl definovat zobrazení $\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_k$, kde $\alpha_i \in V^*$. Je to příklad *multilineární formy*, tj. zobrazení z $V \times \ldots \times V$ do $\mathbb{F}$, které je lineární ve všech k argumentech.

Bilineární formu g jsme vzhledem k bázi reprezentovali maticí $[g]_B := (g(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$. Pro formu typu $\alpha \otimes \beta$ to znamená

$$[\alpha \otimes \beta]_B = ((\alpha \otimes \beta)(e_i, e_j))_{i,j=1}^n = (\alpha(e_i)\beta(e_j))_{i,j=1}^n = [\alpha]_B^T [\beta]_B,$$

což je matice hodnosti 1. Pro LK $h_{rs} e^r \otimes e^s$ takových forem pak

$$[h_{rs} e^r \otimes e^s]_B = (h_{rs} e^r(e_i) e^s(e_j))_{i,j=1}^n = (h_{rs} \delta_i^r \delta_j^s)_{i,j=1}^n = (h_{ij})_{i,j=1}^n$$

Tedy čísla $g(e_i, e_j)$ jsou souřadnicemi bilineární formy vzhledem k bázi $(e^i \otimes e^j)_{i,j=1}^n$ prostoru všech bilineárních forem na V.

Definice

Je-li T k-lineární forma na V, pak její reprezentace $[T]_B$ vzhledem k bázi B je soubor čísel $(T_{i_1,\ldots,i_k})$, kde $\forall j : i_j \in \{1, \ldots, n\}$ a $T_{i_1,\ldots,i_k} := T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$.

Prostor všech k-lineárních forem na V označme $T_k(V)$. Množina

$$(B^*)^k = (e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k} | i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\})$$

je ♣ bází $T_k(V)$ a $[T]_B$ jsou ♣ souřadnice T vůči této bázi.

Prostory V a V^* mají stejnou dimenzi, jsou tedy izomorfní. Těchto izomorfismů je ale mnoho, tudíž nelze najít pro vektor $v \in V$ nějaký kanonicky přiřazený kovektor ve V^*. Jinak je to ale s *druhým duálem* $(V^*)^*$. Definujme $f_v : V^* \to \mathbb{F}$ jako zobrazení, které kovektoru $\alpha \in V^*$ přiřadí hodnotu $f_v(\alpha) := \alpha(v)$. Pak

- zobrazení f_v je lineární a je nulové právě když $v = o$ ♣
- zobrazení $\Phi : V \to (V^*)^*$ definované $\Phi(v) = f_v$ je lineární ♣
- zobrazení Φ je prosté ♣, je to tedy izomorfismus (v případě konečné dimenze V, jinak platí pouze prostota)

Kanonický izomorfismus Φ umožňuje ztotožnit vektor v s „ko-kovektorem“ f_v. Díky tomu můžeme chápat vektory jako zobrazení a definovat jejich tenzorový součin (*bivektor*):

$$(v \otimes w)(\alpha, \beta) := (f_v \otimes f_w)(\alpha, \beta) = f_v(\alpha) f_w(\beta) = \alpha(v)\beta(w)$$

Prostor všech k-vektorů na V označme $T^k(V)$, bází v něm je ♣

$$(B)^k = (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} | i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\})$$

Multilineární formy se nazývají též *kovariantní tenzory* a multivektory *kontravariantní tenzory*. Tenzory jsou i *smíšené*:

Definice

Nechť V je vektorový prostor. Symbolem $T_q^p(V)$ označíme množinu všech zobrazení

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \mapsto \mathbb{R},$$

která jsou lineární v každém argumentu. Mluvíme o množině *p-krát kontravariantních a q-krát kovariantních tenzorů* na V nebo též o *tenzorech typu* (p, q). Číslo $p + q$ se označuje jako *stupeň tenzoru. Souřadnicemi* či *reprezentací* $[T]_B$ tenzoru $T \in T_q^p(V)$ vzhledem k bázi $B = (e_i)_1^n$ ve V rozumíme soubor čísel

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} := T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$$

O dolních indexech hovoříme jako o *indexech kovariantních* a horní se nazývají *indexy kontravariantními*.

Transformační vztah pro souřadnice tenzoru plyne z dosazení $e'_b = R_b^j e_j$ a $e'^a = (R^{-1})_i^a e^i$ do definice souřadnic:

$$T'^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} = (R^{-1})^{a_1}_{i_1} \ldots (R^{-1})^{a_p}_{i_p} R^{j_1}_{b_1} \ldots R^{j_q}_{b_q} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

Pro bilineární formy to znamená

$$T'_{rs} = R_r^i R_s^j T_{ij} \text{ neboli maticově } [T]_{B'} = R^T [T]_B R$$

Pro bivektory

$$T'^{rs} = (R^{-1})_i^r (R^{-1})_j^s T^{ij} \text{ neboli maticově } [T]_{B'} = R^{-1} [T]_B (R^{-1})^T$$

Pro tenzory typu $(1,1)$ pak

$$T'^r_s = (R^{-1})_i^r R_s^j T_j^i \text{ neboli maticově } [T]_{B'} = R^{-1} [T]_B R$$

Poslední vztah připomíná transformaci matice endomorfismu. Skutečně je možné prostory $T_1^1(V)$ a $\mathrm{End}(V)$ kanonicky ztotožnit ♣.