Lineární algebra I (pro fyziky)

Reprezentace vektoru a zobrazení

Dalibor Šmíd

MFF UK

Připomeňme nejprve, co je reprezentace vektoru vzhledem k bázi. Pokud $B = (v_1, \ldots, v_n)$ je báze prostoru V nad $\mathbb{F}$ a $v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i \in V$, pak je reprezentace vektoru v vzhledem k B aritmetický vektor

$$[v]^B := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Je jednoduše vidět ♣, že $\forall r, s \in \mathbb{F}$, $\forall u, v \in V$

$$[ru + sv]^B = r[u]^B + s[v]^B$$

S podobnou vlastností už jsme se setkali v úvodní kapitole. Znamená, že zobrazení $[\ ]^B : V \to \mathbb{F}^n$, které přiřazuje vektoru v jeho reprezentaci, je lineární.

Definice

Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$ a $f : V \to W$ je zobrazení splňující $\forall r, s \in \mathbb{F}$, $\forall u, v \in V$

$$f(ru + sv) = rf(u) + sf(v)$$

Takové f nazýváme *lineární zobrazení*.

Příklady

- $F_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $F_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$
- $f : \mathbb{F}^{n\times k} \to \mathbb{F}^{m\times k}$, $F_A(X) = AX$
- $g : P^n(x, \mathbb{R}) \to P^{n-1}(x, \mathbb{R})$, $g(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$
- $h : F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $h(\phi) = \phi(7) - \phi(\pi)$
- $[\ \ ]^B : V \to \mathbb{F}^n$

V úvodní kapitole jsme vyvodili, že lineárnímu zobrazení $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ můžeme přiřadit matici $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$, jejíž i-tý sloupec je obrazem i-tého vektoru kanonické báze, tedy $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$. Tuto definici můžeme rozšířit na obecné lineární zobrazení:

Definice

Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $f : V \to W$ je lineární zobrazení, $B = (v_1, \dots, v_n)$ je báze V, $C = (w_1, \dots, w_m)$ je báze W. Pak matici

$$[f]_B^C := \big([f(v_1)]^C \big| [f(v_2)]^C \big| \dots \big| [f(v_n)]^C\big)$$

nazýváme *reprezentací lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B a C.*

Pokud $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \subset \mathbb{F}^n$, $C = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) \subset \mathbb{F}^m$, vidíme, že

$$[f]_B^C = (f(\mathbf{e}_1) | f(\mathbf{e}_2) | \dots | f(\mathbf{e}_n))$$

PŘÍKLAD

Uvažujme zobrazení $g : P^2(x,\mathbb{R}) \to P^1(x,\mathbb{R})$, $g(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$, a báze $B = \{1, x, x^2\} \subset P^2(x,\mathbb{R})$, $C = \{1, x\} \subset P^1(x,\mathbb{R})$. Reprezentace obecného prvku prostoru $P^2(x,\mathbb{R})$ vzhledem k bázi B je

$$[ax^2 + bx + c]^B = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

Obrazy prvků báze B (čili derivace monomů) jsou

$$g(1) = 0, \qquad g(x) = 1, \qquad g(x^2) = 2x$$

a jejich reprezentace vzhledem k bázi C jsou

$$[g(1)]^C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [g(x)]^C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [g(x^2)]^C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tedy reprezentace g vzhledem k B a C je $[g]^C_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Uvažujme lineární zobrazení $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dané předpisem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv A\mathbf{x}$$

Pokud K_n označuje kanonickou bázi v $\mathbb{F}^n$, pak $[F_A]_{K_2}^{K_3} = A$.
Zvolme jiné báze než kanonické: $B = \{(1,2)^T, (1,3)^T\}$,
$C = \{(1,1,0)^T, (1,0,0)^T, (0,0,1)^T\}$. Určíme

$$F_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zbývá najít reprezentaci obou vektorů vzhledem k C

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow [F_A]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tvrzení

Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $f : V \to W$ lineární zobrazení, B báze V, C báze W, $v \in V$. Pak

$$[f(v)]^C = [f]^C_B [v]^B$$

Důkaz.

Platí $v = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, kde $(r_1, \ldots, r_n)^T = [v]^B$, pak

$$[f(v)]^C = \left[\sum_{i=1}^n r_i f(v_i)\right]^C = \sum_{i=1}^n r_i [f(v_i)]^C = [f]^C_B [v]^B$$

Nejprve jsme využili linearitu f, pak linearitu $[\ ]^C$ a nakonec definici součinu matice a vektoru. $\square$

Bijektivní lineární zobrazení se nazývá *izomorfismus*. Připomeňme, že F_A je izomorfismus, právě když A je regulární matice. To se dá snadno zobecnit.

Tvrzení

Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $f : V \to W$ lineární zobrazení. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

1. *f je izomorfismus*
2. *Pro všechny dvojice bází $B \subset V$, $C \subset W$ je $[f]_B^C$ regulární*
3. *Pro některou dvojici bází je $B \subset V$, $C \subset W$ je $[f]_B^C$ regulární*

Důkaz.

Pokud je f izomorfismus, pak $f(v) = o$ pouze pro $v = o$. Ale $f(v) = o$ právě když $[f(v)]^C = \mathbf{o}$ a $v = o$ právě když $[v]^B = \mathbf{o}$. Tedy $[f(v)]^C \equiv [f]_B^C[v]^B = \mathbf{o}$, právě když $[v]^B = \mathbf{o}$. Tedy $\mathrm{Ker}[f]_B^C = 0$. Čtvercová matice má nulové jádro, právě když je regulární. Tedy $1 \Rightarrow 2$. Implikace $2 \Rightarrow 3$ je jasná a $3 \Rightarrow 1$ ♣. $\square$

Tvrzení

Nechť $f : V \to W$ je izomorfismus a $(v_1, \dots, v_n)$ je posloupnost vektorů ve V.

1. *$(v_1, \dots, v_n)$ je LN, právě když $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je LN.*
2. *$(v_1, \dots, v_n)$ generuje V, právě když $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ generuje W.*
3. *$(v_1, \dots, v_n)$ je báze V, právě když $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ báze W.*

Důkaz.

Pokud $\sum_{i=1}^n r_i v_i = o_V$ (nulový vektor ve V), pak i $\sum_{i=1}^n r_i f(v_i) = o_W$ (nulový vektor ve W). Je-li tedy $(f(v_1), \dots, f(v_k))$ LN, musí být všechna $r_i = 0$, tedy $(v_1, \dots, v_k)$ je také LN. Nechť naopak $\sum_{i=1}^n r_i f(v_i) = o_W$, tedy vektor $\sum_{i=1}^n r_i v_i \in V$ zobrazuje f na o_W. Zároveň i vektor o_V zobrazuje f na o_W. Protože f je prosté, musí být $\sum_{i=1}^n r_i v_i = o_V$. Z toho plyne druhá implikace prvního bodu. Zbylé dva body $\clubsuit$. $\square$

Příkladem izomorfismu je i $[\ ]^B : V \to \mathbb{F}^n$. Dostáváme tedy

Důsledek

Nechť $(v_1, \ldots, v_k)$ je posloupnost vektorů ve vektorovém prostoru V dimenze n a B je báze V. Pak

1. *$(v_1, \ldots, v_k)$ je LN, právě když $([v_1]^B, \ldots, [v_k]^B)$ je LN.*
2. *$(v_1, \ldots, v_k)$ generuje V, právě když $([v_1]^B, \ldots, [v_k]^B)$ generuje $\mathbb{F}^n$.*
3. *$(v_1, \ldots, v_k)$ je báze V, právě když $([v_1]^B, \ldots, [v_k]^B)$ báze $\mathbb{F}^n$.*

Tento důsledek nám umožňuje převést mnoho výpočtů na hledání hodnosti nějaké matice. Například

$$\{x^2 + x + 1, x^2 + 2x - 1, 2x^2 - 5x + 3\} \text{ je LN} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ je LN} \Leftrightarrow \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Definice

Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Pak množina

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V | f(v) = o\}$$

se nazývá *jádro zobrazení* f a množina

$$\operatorname{Im} f = \{w \in W | \exists v \in V : f(v) = w\}$$

se nazývá *obraz zobrazení* f.

Definice je stejná, jako jsme měli pro jádro a obraz zobrazení mezi aritmetickými vektorovými prostory. Víme už, že tam je $\operatorname{Ker} F_A = \operatorname{Ker} A$, tedy množina všech řešení homogenní SLR s maticí A a $\operatorname{Im} F_A = \operatorname{Im} A$, tedy sloupcový prostor matice A.

Pokud M je množina vektorů z V, zavedeme označení $f(M)$ pro množinu všech obrazů množiny M v zobrazení f. Speciálně $[M]^B$ je množina reprezentací všech vektorů z M vzhledem k bázi B.

Tvrzení

Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ báze V, $C = (w_1, \ldots, w_m)$ báze W. Pak

$$[\operatorname{Ker} f]^B = \operatorname{Ker}[f]^C_B, \qquad [\operatorname{Im} f]^C = \operatorname{Im}[f]^C_B$$

Důkaz.

Platí $\mathbf{x} \in [\operatorname{Ker} f]^B$, právě když $v := \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \operatorname{Ker} f$. To zase nastává právě když $f(v) = o_W$, což je ekvivalentní s $[f(v)]^C = \mathbf{o}$ neboli $[f]^C_B [v]^B = \mathbf{o}$. Protože $\mathbf{x} = [v]^B$, je tím dokázána první část tvrzení. Druhá část ♣. $\square$

Bude-li zobrazení f ve vztahu $[f(v)]^C = [f]^C_B[v]^B$ identita $\mathrm{Id} : V \to V$ a B, dostáváme z něj rovnost

$$[v]^C = [\mathrm{Id}]^C_B[v]^B,$$

která vyjadřuje reprezentaci vektoru v vzhledem k bázi C pomocí reprezentace téhož vektoru vzhledem k bázi B. Matice $[\mathrm{Id}]^C_B$ se nazývá *matice přechodu od báze C k bázi B*. Protože Id je izomorfismus, je $[\mathrm{Id}]^C_B$ regulární matice. Ze vztahu $[v]^B = [\mathrm{Id}]^B_C[v]^C$ vzniklého výměnou bází dostáváme, že $\forall v \in V$ platí

$$[v]^B = [\mathrm{Id}]^B_C[\mathrm{Id}]^C_B[v]^B, \qquad [v]^C = [\mathrm{Id}]^C_B[\mathrm{Id}]^B_C[v]^C,$$

čili, že matice $[\mathrm{Id}]^B_C$ a $[\mathrm{Id}]^C_B$ jsou navzájem inverzní.

Spočtěme matici přechodu od báze $C = \{(0,1),(1,1)\}$ k bázi $B = \{(1,2),(1,3)\}$ v $\mathbb{R}^2$. Zobrazíme pomocí Id prvky B a hledáme jejich reprezentaci vzhledem k C, tj. řešíme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hledaná matice přechodu je tedy $[\mathrm{Id}]^C_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Otestujme příkladem: reprezentace vektoru $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou

$$[v]^C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [v]^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a skutečně platí

$$[\mathrm{Id}]^C_B [v]^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [v]^C$$