Lineární algebra I (pro fyziky)

Báze a dimenze

Dalibor Šmíd

MFF UK

Klíčovým pojmem závěru minulé přednášky byla *báze*. Je to taková podmnožina B vektorového prostoru V, kterou můžeme charakterizovat jednou ze dvou vzájemně ekvivalentních podmínek:

- B je lineárně nezávislá a zároveň generuje V
- Každý vektor z V lze napsat jako lineární kombinaci prvků B právě jedním způsobem

Díky druhé podmínce můžeme každému vektoru přiřadit jeho *reprezentaci vzhledem k B*. K tomu je lepší definovat B nikoli jako množinu, ale jako posloupnost, tedy s určením pořadí. Pokud

$$B = (v_1, \ldots, v_n), \quad v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i,$$

je reprezentace vektoru v vzhledem k B aritmetický vektor

$$[v]^B := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Číslo n se označuje jako *dimenze* vektorového prostoru V.

Zatím ale vůbec nevíme, zda je tato definice korektní. Například vektorový prostor $P(x, \mathbb{R})$ všech reálných polynomů v proměnné x má jistě bázi

$$M := (1, x, x^2, x^3, \ldots, x^i, \ldots)$$

neboť každý polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ lze zapsat jednoznačně jako lineární kombinaci monomů x^i. Protože M je nekonečná posloupnost polynomů, i reprezentací polynomu p je pak nekonečná posloupnost reálných čísel

$$[p]^M = (a_0, a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots)^T$$

Nějakou jinou konečnou bázi prostor $P(x, \mathbb{R})$ mít nemůže, protože každá konečná množina polynomů N může generovat jen polynomy, jejichž stupeň není vyšší než nejvyšší stupeň v N zastoupený.

Definice

Vektorový prostor V nad $\mathbb{F}$ se nazývá *prostorem konečné dimenze*, pokud v něm existuje konečná báze.

Tvrzení

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. *V je konečné dimenze.*
2. *Ve V existuje konečná množina generátorů.*
3. *Z každé množiny generátorů V lze vybrat konečnou bázi V.*

Důkaz za cvičení ♣. Ze třetího bodu tvrzení plyne, že v prostoru V konečné dimenze musejí být všechny báze konečné. Dokážeme-li ještě, že všechny báze V musejí mít stejný počet prvků, budeme moci zadefinovat pojem dimenze V právě jako tento počet. To je v souladu s tím, jak chápeme dimenzi $\mathbb{R}^n$.

Věta (O počtu prvků báze)

Všechny báze vektorového prostoru V konečné dimenze mají stejný počet prvků.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Je-li V prostor konečné dimenze, pak definujeme nezáporné celé číslo $\dim V$ jako počet prvků libovolné báze V. Pokud není, píšeme $\dim V = \infty$. V obou případech nazýváme tuto hodnotu *dimenzí* vektorového prostoru V.

Věta plyne z tzv. Steinitzova lemmatu o výměně:

LEMMA (STEINITZ)

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze, M jeho n-prvková množina generátorů a $N = \{v_1, \dots, v_k\}$ lineárně nezávislá množina ve V. Pak $k \leq n$ a prvky M lze uspořádat do posloupnosti $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ tak, že množina $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots u_n\}$ generuje V.

DŮKAZ VĚTY.
Označme $|M|$ *mohutnost* množiny M (v případě konečných množin je to prostě počet prvků). Aplikujeme-li lemma na dvě báze B a C ve V, $|B| = p$, $|C| = q$, pak $p \leq q$, protože B je LN a C generuje V. Zároveň i $q \leq p$, protože C je LN a B generuje V. Tedy $p = q$. $\square$

Důkaz Steinitzova lemmatu se provádí indukcí podle k. Základní krok pro $k = 1$ ponecháme za cvičení ♣ a rozebereme krok indukční.

Pokud $N = \{v_1, \ldots, v_k\}$ je LN, pak $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ je LN a tudíž podle indukčního předpokladu $n \geq k-1$ a M lze uspořádat do posloupnosti $(u'_1, \ldots, u'_n)$ tak, že $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, u'_k, \ldots, u'_n\}$ generuje V. Kdyby $n = k-1$, šlo by v_k zapsat jako LK vektorů $v_1, \ldots, v_{k-1}$, což je spor s lineární nezávislostí N. Tedy $n \geq k$. Vektor v_k lze pak zapsat jako

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} r'_i v_i + \sum_{i=k}^{n} r'_i u'_i,$$

kde pro nějaké $j \geq k$ musí být $r'_j \neq 0$, jinak bychom opět dostali spor s lineární nezávislostí množiny $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Vyměňme v posloupnosti $(u'_1, \ldots, u'_n)$ vektory k-tý a j-tý a označme toto nové uspořádání $(u_1, \ldots, u_n)$, totéž s koeficienty LK. Pak

$$u_k = -\frac{1}{r_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i - v_k + \sum_{i=k+1}^{n} r_i u_i\right)$$

Potom ale každý $v \in V$ je LK vektorů $v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots u_n$.

Ze Steinitzova lemmatu plyne, že každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit na bázi.

Příklad

Najděme bázi $W = \langle (1,1,1,1),(2,0,1,-1),(1,3,-3,1) \rangle$, která obsahuje vektory $(0,1,-2,0)$ a $(2,1,-1,-1)$. Nejprve ověříme, že $M := \{(1,1,1,1),(2,0,1,-1),(1,3,-3,1)\}$ je báze W a vektory z $N := \{(0,1,-2,0),(2,1,-1,-1)\}$ jsou LK jejích prvků ♣. Dle lemmatu lze v M nahradit dva vektory prvky LN množiny N. Zkusme to konkrétně. Protože

$$(0,1,-2,0) = -\frac{1}{2}(1,1,1,1) + \frac{1}{2}(1,3,-3,1),$$

můžeme třeba nahradit $(1,3,-3,1)$ za $(0,1,-2,0)$. V druhém kole pak z rovnosti $(2,1,-1,-1) = (0,1,-2,0) + (2,0,1,-1)$ plyne, že za $(2,1,-1,-1)$ musíme vyjmout vektor $(2,0,1,-1)$.

$$W = \langle (0,1,-2,0),(2,1,-1,-1),(1,1,1,1) \rangle$$

Proč je posloupnost $((0,1,-2,0),(2,1,-1,-1),(1,1,1,1))$ báze W? Víme, že generuje, mohli bychom ověřit lineární nezávislost. Lepší ale bude se opřít o další důsledek Steinitzova lemmatu:

Důsledek

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ dimenze n a $M \subset V$.

1. *Je-li M lineárně nezávislá, pak $|M| \leq n$.*
2. *Pokud M generuje V, pak $|M| \geq n$*

Navíc platí-li v některém z případů $|M| = n$, pak je M bází V.

Důkaz.

Pro první část stačí uvažovat nějakou bázi N prostoru V a použít ji v lemmatu jako množinu generátorů. Pokud navíc $|M| = |N|$, plyne z lemmatu, že $\langle M \rangle = \langle N \rangle = V$, a tedy že M je bází V. Pro druhou část naopak bude N hrát v lemmatu roli lineárně nezávislé množiny. Pokud $|M| = n$ a M by byla lineárně závislá, mohli bychom z ní vybrat bázi, která by musela mít méně než n prvků. To je ale v rozporu s Větou o počtu prvků báze. $\square$

Příklady

- $\dim \mathbb{F}^n = n$
- V $\mathbb{F}^{m\times n}$ je báze např. $(E_{ij}, i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\})$, kde E_{ij} označuje matici s jednou jedničkou na pozici ij a nulami všude jinde. Tedy $\dim \mathbb{F}^{m\times n} = mn$.
- Posloupnost $((1,0),(i,0),(0,1),(0,i))$ je báze prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$. Obecně je dimenze $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$ rovna $2n$.
- Označme $U_n(\mathbb{F})$ podprostor všech horních trojúhelníkových matic v $\mathbb{F}^{n\times n}$. Pak $(E_{ij}|i,j \in \{1,\ldots,n\}, j \geq i)$ je bází $U_n(\mathbb{F})$. Tedy $\dim U_n(\mathbb{F}) = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Označme $P^n(x,\mathbb{F})$ podprostor všech polynomů stupně nejvýše n v $P(x,\mathbb{F})$. Jeho bází je třeba $(1,x,x^2,\ldots,x^n)$, tedy $\dim P^n(x,\mathbb{F}) = n+1$.
- Pokud $(A|\mathbf{b})$ je rozšířená matice SLR, pak její řešení spočívá vlastně v nalezení partikulárního řešení a báze prostoru $\operatorname{Ker} A$. Při Gaussově eliminaci určujeme, které sloupce jsou pivotní, ty pak tvoří bázi $\operatorname{Im} A$ ♣.

Bude se nám hodit rozšířit pojem elementární úpravy (EÚ) z posloupnosti řádků nějaké matice na libovolnou posloupnost jakýchkoli vektorů. Pak platí

Tvrzení

Nechť C je posloupnost vektorů ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{F}$ a posloupnost D z ní vznikne elementární úpravou. Pak platí

1. *lineární obaly C a D jsou stejné*
2. *C je lineárně nezávislá, právě když D je lineárně nezávislá*
3. *C je bází V, právě když D je bází V*

Důkaz.

Protože EÚ jsou vratné opět pomocí EÚ, stačí dokázat jen to, že každý prvek V, který lze vyjádřit jako LK prvků C, lze vyjádřit i jako LK prvků D. Podobně pro druhou část stačí ověřit, že existuje-li netriviální kombinace prvků C rovná nulovému vektoru, pak existuje taková LK i pro prvky D. Detaily ponecháváme za cvičení ♣. □

Příklad

Určeme dimenzi lineárního obalu množiny $M = \{(3, -6, 1, -1), (1, -2, 3, 1), (-2, 4, 0, 1), (0, 0, 2, 1)\}$ v $\mathbb{R}^4$. Sestavíme matici, která má tyto vektory jako řádky, a provádějme EŘÚ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řádky poslední matice jsou LZ, tedy i M je LZ. Lineární obal řádků se také zachovává, tedy $\langle M \rangle$ je roven lineárnímu obalu LN množiny $\{(1, -2, 3, 1), (0, 0, 2, 1)\}$. Proto $\dim\langle M \rangle = 2$.