

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
12. 6. 2026

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x) = \exp(x(|x| - 1))$, kde $\exp(\cdot)$ označuje exponenciální funkci.
 - (a) [4 b.] Má funkce f derivaci v bodě $x = 0$? Má v bodě $x = 0$ druhou derivaci?
 - (b) [3 b.] Najděte body, v nichž f nabývá své extrémy, a určete jejich typ (tj. zda je extrém globální nebo jen lokální, zda je to maximum nebo minimum).
 - (c) [3 b.] Určete Taylorův polynom řádu 2 funkce f v bodě 1.
2. (a) [3 b.] Napište definici pojmu *hromadný bod* a pojmu *limes superior* posloupnosti čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
 - (b) [4 b.] Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost reálných čísel a necht' $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je definovaná vztahem $b_n = |a_n|$. Necht' H je nezáporné reálné číslo. Dokažte, že H je hromadný bod posloupnosti (b_n) právě tehdy, když H nebo $-H$ je hromadný bod posloupnosti (a_n) .
 - (c) [3 b.] Spočítejte limitu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované vztahem

$$a_n = \frac{n}{\ln(n) + (-1)^n}.$$

3. (a) [3 b.] Definujte, co znamená, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě A .
 - (b) [3 b.] Zformulujte Bolzanovu větu (o nulových bodech spojitě funkce). Nemusíte ji dokazovat.
 - (c) [4 b.] Rozhodněte, zda je pravdivé následující tvrzení:
Pokud pro funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|f(x)| \leq x^6$, pak je nutně f spojitá v bodě 0.
4. (a) [3 b.] Napište, jak je definována primitivní funkce a jak je definován Newtonův integrál.
 - (b) [3 b.] Najděte příklad funkce $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která není newtonovsky integrovatelná na intervalu $(0, 1)$, ale je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0, 1]$.
 - (c) [4 b.] Na grafu funkce $f(x) = x^2$ zvolme bod P o souřadnicích $(-1, 1)$ a bod Q o souřadnicích $(2, 4)$. Jaký je obsah plochy, která je shora ohraničená úsečkou PQ a zdola ohraničená grafem funkce $f(x) = x^2$ mezi body P a Q ?