Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
6. 6. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Nechť $A \in \mathbb{R}$ je reálná konstanta. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(Ax) & \text{pro } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

   (a) [3 b.] Pro jaké hodnoty A je funkce f spojitá v nule?

   (b) [3 b.] Pro jaké hodnoty A má funkce f derivaci v nule?

   (c) [4 b.] V závislosti na hodnotě parametru A určete, ve kterých bodech f nabývá lokálních a globálních extrémů a o jaké typy extrémů se jedná.

2. (a) [3 b.] Definujte, co znamená, že funkce f je *konvexní* na intervalu I.

   (b) [4 b.] Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé:
   "Nechť β je reálné číslo a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, která je konvexní na $\mathbb{R}$. Definujme funkci $g(x) := f(\beta x)$. Potom platí, že pokud $\beta > 0$, tak g je konvexní na $\mathbb{R}$, a pokud $\beta < 0$, tak g je konkávní na $\mathbb{R}$."

   (c) [3 b.] Uvažujme funkci $f(x) = \min\{\exp(x), \exp(-x)\}$. Je tato funkce konvexní na $\mathbb{R}$?

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definován součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a co znamená, že řada je konvergentní.

   (b) [3 b.] Zformulujte integrální kritérium pro konvergenci řad. Nemusíte ho dokazovat.

   (c) [4 b.] S využitím odhadů sumy pomocí integrálu najděte co nejtěsnější horní a dolní odhad na hodnotu $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Čemu se rovná limita $\lim_{n\to\infty} s_n$?

4. (a) [3 b.] Napište definici Newtonova integrálu $(N)\int_A^B f\,dx$.

   (b) [3 b.] Nechť f je funkce, která je newtonovsky integrovatelná na intervalu $(-2, 5)$. Definujme funkci $g(x) := xf(x^2)$. Lze z této definice odvodit, že i g je newtonovsky integrovatelná na nějakém otevřeném intervalu I? Pokud ano, najděte co největší takový interval I.

   (c) [4 b.] Spočítejte:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \exp(1+\sin x)\cdot \sin x \cdot \cos x\,dx.$$