(1)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a uvažujme triangulaci $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω sestávající z obdélníků T takových, že libovolné dva různé obdélníky z $\mathcal{T}_h$ mají buď disjunktní vnitřky, nebo jejich průnik je společný vrchol či společná hrana. Uvažujme prostor

$$V_h = \{ v \in L^2(\Omega);\ v|_T \in \operatorname{span}\{1, x, y, x^2 - y^2\}\ \forall T \in \mathcal{T}_h,$$
$$v \text{ je spojité ve středech vnitřních hran } \mathcal{T}_h \}.$$

Definujme operátor $\pi_h : C(\overline{\Omega}) \to V_h$ takový, že

$$\forall v \in C(\overline{\Omega}): \qquad \pi_h v = v \quad \text{ve středech všech hran } \mathcal{T}_h.$$

Ukažte, že tato podmínka operátor π_h jednoznačně definuje $\forall v \in C(\overline{\Omega})$.

Dokažte, že platí odhad chyby interpolace

$$\| v - \pi_h v \|_{0,\Omega} \le C h^2 |v|_{2,\Omega} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

pokud triangulace $\mathcal{T}_h$ splňují určitý předpoklad.

(2)

Nechť $\Omega=(0,1)^2$ a uvažujme úlohu

$$-\Delta u=f \text{ v } \Omega, \quad u=0 \text{ na } \partial\Omega,$$

kde $f\in L^2(\Omega)$. Tuto úlohu diskretizujeme konformní metodou konečných prvků s lineárními trojúhelníkovými konečnými prvky. Dokažte, že diskrétní řešení u_h splňuje odhad

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leq Ch^2|u|_{2,\Omega}.$$

Přitom bez důkazu využijte, že pro prostory zmíněných konečných prvků na regulárním systému triangulací lagrangeovský interpolační operátor r_h splňuje

$$\|v-r_hv\|_{0,\Omega}\leq Ch^2|v|_{2,\Omega}, \quad |v-r_hv|_{1,\Omega}\leq Ch|v|_{2,\Omega} \quad \forall v\in H^2(\Omega)$$

③

Nechť je dán na referenčním konečném prvku $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ kvadraturní vzorec

(*) $$\sum_{\ell=1}^{L} \hat{\omega}_\ell \hat{\varphi}(\hat{b}_\ell)$$

pro aproximaci integrálu $\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}\, d\hat{x}$, kde $\hat{b}_\ell \in \hat{T}$ a $\hat{\omega}_\ell > 0$, $\ell = 1, \dots, L$. Uvažujme triangulaci $\mathcal{T}_h$, jejíž prvky jsou afinně ekvivalentní $\hat{T}$, a $\forall T \in \mathcal{T}_h$ definujme kvadraturní vzorec $\sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,T}\, \varphi(b_{\ell,T})$, kde $\omega_{\ell,T}$ a $b_{\ell,T}$ jsou definovány pomocí $\hat{\omega}_\ell$ a $\hat{b}_\ell$ na základě afinní ekvivalence mezi T a $\hat{T}$. Nechť $\hat{P} \subset P_m(\hat{T})$ a kvadraturní vzorec (*) je přesný pro polynomy stupně $2m-2$. Na každém $T \in \mathcal{T}_h$ uvažujme konečný prvek (T, P_T, Σ_T) afinně ekvivalentní $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ a definujme odpovídající prostor konečných prvků V_h. Nechť Ω je vnitřek množiny $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ (předpokládáme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) a uvažujme funkce $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $i,j = 1, \dots, n$, splňující

$$\exists\, \Theta > 0 : \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \Theta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nechť $$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i} v_{x_j}\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T a_{ij}\, u_{x_i} v_{x_j}\, dx$$

a definujme bilineární formu a_h tak, že integrály přes množiny T vypočítáme pomocí výše uvedeného kvadraturního vzorce. Ukažte, že bilineární formy a_h jsou stejnoměrně V_h-eliptické, tj., že $\exists \alpha > 0 : \; a_h(v_h, v_h) \geq \alpha |v_h|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v_h \in V_h \; \forall h > 0$. (Předp., že $|\cdot|_{1,\Omega}$ je norma na V_h.)

4

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s polygonální hranicí a $\mathcal{T}_h$ její triangulace sestávající z trojúhelníků. Uvažujme rci

$$-\nu \Delta u + cu = f \quad v\ \Omega, \qquad u = 0 \quad na\ \partial\Omega,$$

kde $c, f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$ v Ω. Slabá formulace

$$u \in H^1_0(\Omega): \quad \int_\Omega \nu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx .$$

$V_h = \{ v_h \in H^1_0(\Omega);\ v_h|_T \in P_k(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h \}$. Pro $\mathcal{T}_h$ splňující podmínky regularity a kompatibility pak lagrangeovská interpolace Π_h splňuje

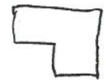
$$\|v - \Pi_h v\|_{0,\Omega} + h |v - \Pi_h v|_{1,\Omega} \leq C h^{m+1} |v|_{m+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{m+1}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \ m = 1, \dots, k.$$

$\forall T \in \mathcal{T}_h$ definujeme $r_T : C(T) \to P_1(T)$ tak, že $r_T v = v$ ve vrcholech T $\forall v \in C(T)$. Definujeme diskrétní problém

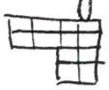
$$u_h \in V_h: \quad \nu \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (r_T c)\, u_h v_h \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (r_T f) v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h.$$

Vyšetřete řád konvergence chyby $|u - u_h|_{1,\Omega}$.

5

Nechť $\Omega = \{(x,y) \in (0,1)^2;\ x > \frac{1}{2} \text{ nebo } y > \frac{1}{2}\}$, tj. $\Omega =$  .
Pak slabé řešení úlohy

$$-\Delta u = f \ \text{v}\ \Omega, \quad u = 0 \ \text{na}\ \partial\Omega,$$

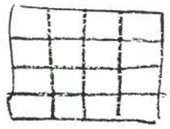
kde $f \in L^2(\Omega)$, obecně neleží v $H^2(\Omega)$. Na Ω definujme triangulaci sestávající ze stejně velkých čtverců () a aproximujme u metodou konečných prvků s prostorem

$$V_h = \{ v \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1_0(\Omega);\ v|_K \in Q_1(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Ukažte, že $\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$.

(6)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a nechť $\mathcal{T}_h$ je triangulace Ω sestávající se stejně velkých čtvercových elementů T. Pro každý element T definujme operátor $\Pi_T : C(T) \to Q_2(T)$ následujícími podmínkami:



$$(\Pi_T v)(x) = v(x) \qquad \forall \text{ vrchol } x \in T$$

$$\int_E \Pi_T v \, d\sigma = \int_E v \, d\sigma \quad \forall \text{ hranu } E \subset \partial T$$

$$\int_T \Pi_T v \, dx = \int_T v \, dx ,$$

kde $v \in C(T)$ je libovolná funkce. Je operátor Π_T definován jednoznačně?

Pro $v \in C(\overline{\Omega})$ definujme $\Pi_h v \in L^2(\Omega)$ takové, že

$$(\Pi_h v)\big|_T = \Pi_T v \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h .$$

Je funkce $\Pi_h v$ spojitá na $\overline{\Omega}$?

Vyšetřete interpolační vlastnosti operátoru Π_h, tj. pro dostatečně regulární fce $\underline{v}$ odvoďte odhad interpolační chyby v L^2-normě a H^1-normě.

(8)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a uvažujme úlohu najít fci $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ splňující

(*) $$-\Delta u + u_x + 3u = 1 \quad \text{v } \Omega, \qquad u = g \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde g je zadaná funkce. Na Ω definujme rovnoměrné triangulace $\mathcal{T}_h$ sestávající ze stejných trojúhelníků o průměru $\underline{h}$ splňujících obvyklé předpoklady. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $V_h = \{ v \in C(\overline{\Omega});\ v|_T \in P_k(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h \}$.

Odvoďte diskretizaci úlohy (*) metodou konečných prvků založenou na prostorech V_h, tj. diskrétní řešení u_h náleží do V_h.

Odvoďte nejlepší možný odhad pro chybu $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$.

(9)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s polygonální hranicí a $\mathcal{T}_h$ její triangulace sestávající z trojúhelníků. Uvažujme slabou formulaci

najít $u \in H^1_0(\Omega)$: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega a_{ij}\, u_{x_i} v_{x_j}\, dx = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$,

kde $a_{ij}, f \in C(\overline{\Omega})$, $\exists \theta > 0: \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$.

Nechť $V_h \subset H^1_0(\Omega)$ je prostor po částech lineárních konečných prvků a definujme diskrétní problém

najít $u_h \in V_h$: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T a_{ij}(c_T)(u_h)_{x_i}(v_h)_{x_j}\, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(c_T) v_h\, dx \quad \forall v_h \in V_h$,

kde c_T je těžiště trojúhelníku T. Ukažte, že za určitých předpokladů platí $|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C h$,

kde C nezávisí na h a specifikujte předpoklady, které jsou pro to postačující.

(10)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, je omezená oblast s polyhedrální hranicí a nechť $\{\mathcal{T}_h\}$ je systém regulárních triangulací Ω sestávajících ze simplexů. Na referenčním simplexu $\hat{T}$ definujme kvadraturní vzorec $\sum_{\ell=1}^{L} \hat{\omega}_\ell \hat{\varphi}(\hat{b}_\ell)$ pro aproximaci integrálu $\int_{\hat{T}} \hat{\varphi} \, d\hat{x}$ a předpokládejme, že je přesný pro polynomy stupně $2k-2$, kde $k \in \mathbb{N}$. Pro libovolný simplex $T \in \cup \mathcal{T}_h$ nechť $E_T(\varphi)$ je chyba kvadraturní formule indukované formulí na $\hat{T}$ při aplikaci na fci φ. Dokažte, že existuje konstanta C taková, že $\forall\, T \in \cup \mathcal{T}_h$ platí

$$|E_T(a u v)| \leq C h_T^k \|a\|_{k,\infty,T} \|u\|_{k-1,T} \|v\|_{0,T} \quad \forall\, a \in W^{k,\infty}(T),\ u, v \in P_{k-1}(T),$$

kde $h_T = \operatorname{diam}(T)$.

(11)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a $\mathcal{T}_h$ je triangulace Ω sestávající z trojúhelníků. Na každém trojúhelníku T uvažujme konečný prvek (T, P_T, Σ_T), kde

$$P_T = \operatorname{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\},$$

přičemž $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou barycentrické souřadnice vzhledem k vrcholům T, a

$$\Sigma_T = \left\{ v(a_i), \frac{1}{|E_i|}\int_{E_i} v \, d\sigma, \int_T v \, dx \right\}_{i=1,2,3},$$

kde a_1, a_2, a_3 jsou vrcholy T a E_1, E_2, E_3 jsou hrany T. Vyšetřete, zda se jedná skutečně o konečný prvek, a napište definici příslušného prostoru konečných prvků. Definujte odpovídající interpolační operátor $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to V_h$ a odvoďte pro něj nejlepší možný odhad chyby interpolace.

(12)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a $\mathcal{T}_h$ je triangulace Ω sestávající z trojúhelníků a definujte diskretizaci úlohy
$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \qquad u = g \text{ na } \partial\Omega,$$
kde f a g jsou dané funkce. Dokažte, že pro diskrétní řešení u_h platí odhad
$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C h \, |u - u_h|_{1,\Omega},$$
kde C nezávisí na h.

7. Consider the equation $-\Delta u + au = f$ in Ω with homogeneous Dirichlet boundary conditions. Here $f \in L^2(\Omega), a \in W^{k,\infty}(\Omega), a \geq 0$. Formulate weakly and discretise this equation using the space

$$V_h = \{v \in \bar{\Omega} : v|_T \in P_k(T)\}.$$

We approximate $\int_\Omega au_hv_h\mathrm{d}x$ by a quadrature formula of order $2k-1$. Show that

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^k(|u|_{k+1,2,\Omega} + \|a\|_{k,\infty,\Omega} \cdot \|u\|_{k-1,2,\Omega}).$$

13. Nechť $\hat{E(\varphi)} = 0\ \forall \hat{\varphi} \in \hat{P}_{2k-2}(\hat{T})$. Nechť $k > n/q$. Dokažte, že existuje $C > 0$, že

$$|E_T(fp)| \leq Ch_T^k|T|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_{k,q,T} \cdot \|p\|_{1,T}\ \forall f \in W^{k,q}(T),\ p \in P_k(T).$$

Let T be a triangle with the vertices a_1, a_2, a_3. Let λ_1, λ_2, λ_3 be the barycentric coordinates with respect to the vertices of T. Denote

$$P_T = \text{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\}\,, \qquad \Sigma_T = \{\Phi_i\}_{i=1}^4\,,$$

where Φ_i are linear forms defined by

$$\Phi_i(v) = v(a_i)\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \qquad \Phi_4(v) = \frac{1}{|T|}\int_T v\,\mathrm{d}x$$

For any $v \in C(T)$. Prove that the triple (T, P_T, Σ_T) is a finite element.

Let $\mathscr{T}_h$ be a triangulation of $\Omega := (0,1)^2$ consisting of triangles satisfying the assumptions $(\mathscr{T}_h1)$–$(\mathscr{T}_h5)$ introduced during the FEM1 course. Let the finite element (T, P_T, Σ_T) introduced above be assigned to each element of the triangulation $\mathscr{T}_h$ and formulate the corresponding finite element space X_h and the set Σ_h of the degrees of freedom of X_h. Characterize the dimension of X_h and describe the basis functions of X_h. Find out whether $X_h \subset C(\overline{\Omega})$.

Let $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to X_h$ be the interpolation oparator. Assuming that the triangulations are regular, derive estimates of the interpolation error with respect to the L^2 norm and H^1 norm.

Consider the Poisson equation in Ω with homogenous Dirichlet boundary conditions:

$$-\Delta\,u = f \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\,, \tag{1}$$

where $f \in L^2(\Omega)$ is a given function. Formulate a discretization of (1) based on the space X_h and prove estimates of the error of the discrete solution with respect to the L^2 norm and H^1 norm.