Skúškové testy z Lineárnej algebry II, LS 2019/2020

Zozbierané z pamäte študentov

1.Termín 27.5.2020

1. Věta o **QR** rozkladu matice, kdy je matice **R** diagonální?
2. **A** je unitárni matice. Napis aspon 4 ekvivalentní tvrzení.
3. Co je nulová množina kvadratické formy? Uved příklad kvadratické formy, u které nulová množina není podprostor.
4. Definuj trilinearní formu. Jakou dimenzi ma prostor antisymetrickych trilinearnich forem na $\mathbb{R}^5$?
5. Caley-Hamiltonova věta. Důkaz pro 2×2 matice.
6. Definuj kontrakci tenzoru, dokaž, že nezaleží na souradnicích.
7. Dokáž, že operator $\mathbb{B}$ ma stejný rank jako jeho modul.
8. Na co se zobrazi jednotkova kruznice po zobrazeni matici **A**. (Nejsem si presne jistej tou matici).
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
9. Jacobi-Sylvesterova věta, formuluj a dokaž.

2.Termín 3.6.2020

1. Skalární součin na $\mathbb{C}$, požadavky na matici skalárního součinu na $\mathbb{C}$.
2. Věta o diagonalizaci normálního operátoru. Najděte příklad normálního operátoru, který není unitární ani samosdružený.
3. Popište soustavu souradnic afinního prostoru a popište transformaci souradnic.
4. Současné diagonalizovatelné operátory.
5. Nějaký tenzůrek typu $(1, 3)$, určte transformaci jeho souradnic.
6. Parsevalova rovnost a její důkaz.
7. Dokažte vztah pro determinant exponenciely matice.
8. Ukažte, jak se řeší podurčena soustava lineárních rovnic.
9. Napište a dokažte větu o afinní klasifikaci regularních středových kvadrik. Určete (najděte) kanonický tvar regulární nestredové kvadriky.

3.Termín 6.6.2020 (Pohraničná skúška)

... (chýbajú dáta) ...

4.Termín 10.6.2020

1. Definuj Fourierove koeficienty. Zadaný vektor $(3-i, i, -i)^T$ a báza s komplexnými číslami. Nájdi a over, či platia Fourierove koeficienty.
2. Sylvestrov zákon zotrvačnosti. Zadaná $Q_g(x)$ ako polynóm, nepamätám si presne, ale maticovo to niečo ako
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Nájdi 2 rôzne polárne bázy tejto kvadratickej formy, dokáž na nich, že platí Sylvestrov zákon zotrvačnosti.
3. Čo musí platiť pre normálny operátor, ktorý má reálne spektrum? Napíš príklad operátora, ktorý má čisto komplexné (alebo imaginárne?) spektrum.
4. Definícia exponenciály matice. Aký je vzťah medzi $\exp \mathbf{A}$ a $\exp(-\mathbf{A})$?
5. Definícia kovektoru. Ako sa transformujú jeho súradnice pri prechode do inej bázy?
6. Definícia tenzorového súčinu bilineárnej formy. Dá sa každá bilineárna forma zapísať ako tenzorový súčin dvoch lineárnych?
7. Odvoďte vzorec pre maticu ortogonálnej projekcie $A(A^TA)^{-1}A^T$.
8. Veta o nerovnosti pre algebraickú a geometrickú násobnosť vlastného čísla. Dokáž.
9. ... (Nepamätám si.)
10. Veta o ortogonálnej diagonalizácii normálneho operátora. Dokáž.

5.Termín 17.6.2020

... (chýbajú dáta) ...

6.Termín 24. 6. 2020

1. Byl definován endomorfismus s jediným vlastním číslem $\lambda = 8$, vysvětlete, co znamená řetízek příslušný danému vlastnímu číslu a endomorfismu, napište, jak bude vypadat matice endomorfismu vzhledem k bázi tvořené řetízkem.
2. Napište větu spojující samosdružený operátor s jeho spektrem a důsledek týkající se ortogonální diagonalizace symetrické formy.
3. Napište transformační formuli pro diagonalizaci bilineární formy, kde vystupuje matice přechodu.
4. Definujte kovektor a jmenujme příklad kovektoru na nekonečnědimenzionálním prostoru.
5. Definujte ortogonalní projekci na podprostor $W \leq V$. Co je jádrem a obrazem tohoto zobrazení?
6. Napište definici invariantního podprostoru a dokažte, že kolik je zobecněných vlastních podprostorů endomorfismu f příslušný vlastnímu číslu λ invariantním podprostorem endomorfismu f.
7. Formulujte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro normu indukovanou skalárním součinem.

8. Nechť A je reálná symetrická n matice,$\mathbf{b}$ je reálný vektor $n \times 1$, c je reálný skalár.Předpokládejme, že kvadrika určena rovnicí $x^T A x + 2\mathbf{b}^T x + c = 0$ je regulární a středová. Zapište a odvoďte vyjádření středu kvadriky pomocí veličin A, $\mathbf{b}$ a c.

9. Formulujte a dokažte větu o souvislosti aproximativniho řešení soustavy lineárních rovnic a Moore-Penroseovy pseudoinverze. (4 body)