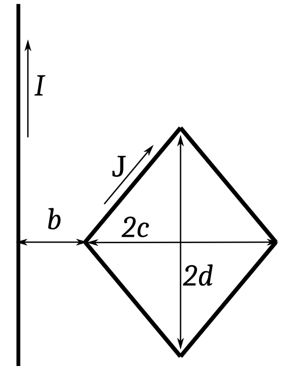
2. Písemná práce z Klasické elektrodynamiky 17. 5. 2024

1. Síla mezi vodiči

Spočtěte sílu, kterou působí nekonečně dlouhý přímý vodič s proudem I na kosočtvercovou smyčku s proudem J. Oba vodiče se nacházejí v rovině $y = 0$, kosočtverec má stranu $a = \sqrt{c^2 + d^2}$, jedna z jeho uhlopříček je rovnoběžná s přímým vodičem a má délku $2d$, druhá úhlopříčka kosočtverce má délku $2c$. Vzdálenost středu čtverce od tohoto vodiče je $b + c$. Okomentujte směr síly.



Obrázek k úloze 1.

Jednodušší bude vzít známé pole přímého vodiče

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{e}_\phi \quad \overset{y=0}{=} \quad \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{e}_y$$

a spočíst sílu, kterou toto pole působí na 4 strany čtverce. Protože (z Lorentzovy síly $q\vec{v} \times \vec{B}$) je

$$d\vec{F} = d\vec{J} \times \vec{B} = J\vec{dl} \times \vec{B},$$

bude klíčové popsat element délky úsečky z $[x_1, 0, z_1]$ do $[x_2, 0, z_2]$. Jako parametr použijeme souřadnici x (vyskytuje se přímo ve jmenovateli) a tedy

$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \vec{dl} = \left[\vec{e}_x + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\vec{e}_z\right] dx, \quad \vec{J}dl \times \vec{B} = \frac{k}{x}\left[\vec{e}_z - \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\vec{e}_x\right] dx, \quad k = \frac{\mu_0 JI}{2\pi}.$$

Označíme-li body vrcholy kosočtverce podle ciferníku indexy $\vec{x}_{12}, \vec{x}_3, \vec{x}_6$ a $\vec{x}_9$, dostaneme

$$F_z = k\int_{\vec{x}_{12}}^{\vec{x}_3} \frac{dx}{x} + k\int_{\vec{x}_3}^{\vec{x}_6} \frac{dx}{x} + k\int_{\vec{x}_6}^{\vec{x}_9} \frac{dx}{x} + k\int_{\vec{x}_9}^{\vec{x}_{12}} \frac{dx}{x} = +k\int_{\vec{x}_{12}}^{\vec{x}_{12}} \frac{dx}{x} = 0$$

Druhý integrál ale nevymizí, protože

$$\frac{z_3 - z_{12}}{x_3 - x_{12}} = \frac{z_9 - z_6}{x_9 - x_6} = -\frac{d}{c} \quad \frac{z_6 - z_3}{x_6 - x_3} = \frac{z_{12} - z_9}{x_{12} - x_9} = +\frac{d}{c}$$

a tedy

$$F_x = k\frac{d}{c}\left(\int_{\vec{x}_{12}}^{\vec{x}_3} \frac{dx}{x} - \int_{\vec{x}_3}^{\vec{x}_6} \frac{dx}{x} + \int_{\vec{x}_6}^{\vec{x}_9} \frac{dx}{x} - \int_{\vec{x}_9}^{\vec{x}_{12}} \frac{dx}{x}\right) = k\frac{d}{c}\left(\int_{b+c}^{b+2c} \frac{dx}{x} + \int_{b+c}^{b+2c} \frac{dx}{x} + \int_{b+c}^{b} \frac{dx}{x} + \int_{b+c}^{b} \frac{dx}{x}\right).$$

Tak dostaneme

$$F_x = \frac{\mu_0 IJ}{2\pi}\frac{d}{c}\ln\frac{b^2(b+2c)^2}{(b+c)^4} = \frac{\mu_0 IJ}{\pi}\frac{d}{c}\ln\frac{b(b+2c)}{(b+c)^2} = \frac{\mu_0 IJ}{\pi}\frac{d}{c}\ln\frac{1}{1 + \frac{c^2}{b(b+2c)}}.$$

Tato hodnota je záporná, takže oba vodiče se při udaném směru proudů přitahují.
Komentář ke směru síly: Oba proudy se přitahují, protože bližší vodiče mají proud souhlasně orientovaný.
Kontrola: Pro malou smyčku $c \ll b$ musí být síla přibližne dána silovým působením na magnetický dipól: $F = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}(= m_y\partial_y)B_x\vec{e}_x$. Pro smyčku je $\vec{m} = J\vec{S}$, kde $\vec{S}$ je vektor plochy smyčky, $\vec{S} = 2cd\vec{e}_y$. Pokud použijeme faktu, že v místě bez zdrojů je $\nabla \times \vec{B} = 0$ (tedy $\partial_y B_x = \partial_x B_y$), je

$$F_x = J(2cd)\partial_x \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\bigg|_{x=b+c} = -\frac{\mu_0 IJ}{\pi}\frac{cd}{(b+c)^2}.$$

Oba výrazy se liší o člen $O(b^{-4})$, první dva členy rozvoje v $1/b$ se shodují.

2. Permanentní magnet

Válcový permanentní magnet, jehož osa splývá s osou z, o poloměru podstavy a a výšce h, se středem magnetu v $z = h/2$ a vyrobený z materiálu s konstantní (homogenní) magnetizací $\vec{M} = M\vec{e}_z$ má na ose z magnetickou indukci $\vec{B} = B_z\vec{e}_z$, kde

$$B_z(R=0,z)=\left\{\begin{array}{ll} f(z-h)-f(z) & z<0\\ f(z-h)+f(z) & 0<z<h \\ -f(z-h)+f(z) & z>h\end{array}\right\},\qquad f(\zeta)=\frac{S}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{\zeta^2}}}.$$

1. Spočtěte magnetický dipólový moment $\vec{m}$ permanentního magnetu
   a) jako integrál hustoty magnetického dipólového momentu,
   b) (bonus 2b) jako dipólový moment magnetizačních proudů.


Obrázek k úloze 2.

a) $\vec{m}\int \vec{M}d^3x=\pi a^2 h\vec{M}$
b) Zde musíme spočíst $\vec{j}_{\text{ploš}}=\vec{n}\times[\vec{M}]$. Vzhledem k orientaci normál k povrchu válce se uplatní jen plášť, kde $\vec{j}_{\text{ploš}}=M_z\vec{e}_\phi$, a tedy

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int\vec{r}\times\vec{j}_{\text{ploš}}dS=-\frac{1}{2}\int M_z r\vec{e}_\theta dS=\frac{1}{2}\int M_z r\sin\theta\vec{e}_z\, dS=\frac{1}{2}M_z a(2\pi a)h,$$

kde jsme použili sférické souřadnice (protože $\vec{r}=r\vec{e}_r,\ \vec{e}_r\times\vec{e}_\phi=-\vec{e}_\theta$) a to, že na povrchu válce je $r\sin\theta=a$.

2. Ukažte, že pro $z\to\pm\infty$ je $B_z\approx k\,|z|^n$, tedy nalezněte k a n.

Nejprve si spočteme

$$f(z)\doteq S\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}\right)$$

Následně tedy

$$B(z\to\pm\infty)=\mp[f(z-h)-f(z)]=\mp S\left[\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{(z-h)^2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}\right)\right]=\pm\left[\frac{Sa^2}{2(z-h)^2}-\frac{Sa^2}{2z^2}\right]=\pm\frac{Sa^2}{2z^2}\left[\frac{1}{(1-h/z)^2}-1\right].$$

S použitím rozvoje $1/(1+\epsilon)^2$ a vztahu $\pm 1/z^3=1/|z|^3$ pro $z\to\pm\infty$ máme

$$B(z\to\pm\infty)=\pm\frac{Sa^2}{z^2}\frac{h}{z}=\frac{Sa^2h}{|z^3|}.$$

Tedy, $n=-3$ a $k=Sa^2h$.

3. Proč a jak musí souviset hodnota konstanty S s magnetizací $\vec{M}$?

Ze vztahu pro pole dipólu, výsledku bodu 1. a s použitím $r=|z|$ máme na ose

$$B_z^{\text{dip}}=\frac{\mu_0 m_z}{2\pi}\frac{1}{|z^3|}.$$

Konstanta úměrnosti S je podle tohoto vztahu dána m_z a ten je úměrný $\vec{M}$. Proto z rovnosti faktorů před $|z|^{-3}$ dostaneme

$$\frac{\mu_0 m_z}{2\pi}=\frac{\mu_0\pi a^2 h M_z}{2\pi}=Sa^2h\implies S=\frac{\mu_0 M_z}{2}.$$

4. Jaká je hodnota magnetické indukce ve středu magnetu?

Dosadíme $z=h/2$ do vztahu v zadání, a protože

$$f(\pm h/2)=\frac{S}{\sqrt{1+\frac{4a^2}{h}}},$$

vyjde

$$B_z(z=h/2,R=0)=\frac{2S}{\sqrt{1+\frac{4a^2}{h}}}=\mu_0 M_z\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4a^2}{h}}}$$

To je v souladu se známým faktem, že uvnitř dlouhého $h\ll a$ podélně homogenně magnetizovaného tyčového magnetu je $|B|=\mu_0 M_z$.

5. Jaká je hodnota magnetické intenzity ve středu magnetu?

Použijeme vztah $\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B} - \vec{M}$ a dostaneme

$$H_z(z = h/2, R = 0) = M_z \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4a^2}{h}}} - 1 \right].$$

Výraz v závorce je záporný, jak u permanentního magnetu bez externího buzení očekáváme. Úpravy výrazů s odmocninami nebo rozvoj ukáží, že $H_z \sim M_z(-2a^2/h^2)$. Protože opačná orientace H a M povzbuzuje odmagnetovávání, tento výraz se interpretuje jako možné doporučení skladovat permanentní magnety v souborech ve tvaru co nejštíhlejších válců.

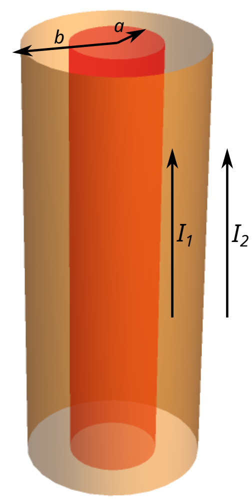
Může se hodit, že

$$\vec{B}_\mathrm{d} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}\,r^2}{r^5}, \quad \int_{-h}^{h} \frac{a^2 ds}{[a^2 + (z-s)^2]^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{h+z}{\sqrt{a^2 + (h+z)^2}} + \frac{h-z}{\sqrt{a^2 + (h-z)^2}} \right].$$

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\,\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\,\epsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,\epsilon^3 + O\left(\epsilon^4\right)$$

3. Rozdělení prudů ve vedení v kvazistacionární aproximaci

Uvažujte válcově symetrický problém, kdy $\vec{A}, \vec{E}, \vec{B}$ jsou axiálně a translačně symetrická vektorová pole. Posunutí i rotace se konají podél/okolo osy z. Zaveďme označení $\mathcal{C}_1$ pro válcovou plochu o poloměru a (tedy plochu $x^2 + y^2 = a^2$) a $\mathcal{C}_2$ pro podobnou válcovou plochu o poloměru b. Osy válců jsou tedy totožné s osou z.
Předpokládejte, že po $\mathcal{C}_1$ teče rovnoměrně rozložený plošný proud o celkové hodnotě I_1, a že po $\mathcal{C}_2$ teče rovnoměrně rozložený plošný proud o celkové hodnotě I_2.



Obrázek k úloze 3.

1. Uvažujte časově nezávislý potenciál $\Phi = -\mathcal{E}z$ (který tedy závisí jen na souřadnici z) a nalezněte, v jakém poměru I_2/I_1 se musejí rozložit v čase konstantní proudy, mají-li válcové plochy výšky H odpor $R^{(1,2)} = H\ r^{(1,2)}$.

Skutečnost, že Φ závisí jen na z znamená, že elektrické pole míří ve stejném směru jako pole proudové a že napětí na úseku vedení délky H je $U_H = R^{(1)}I_1 = R^{(2)}I_2$. Poměr proudů je tedy

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R^{(1)}}{R^{(2)}},$$

proudy si tedy volí cestu menšího odporu.

2. Nalezněte vektorový potenciál ve tvaru $\vec{A}^{(1)} = \Theta(R-a)f(R)\vec{e}$, kde R je odpovídající válcová souřadnice a $\Theta(x) = (x + |x|)/(2x)$ je Heavisideova funkce. Nalezněte příslušnou funkci $f(R)$ a pole jednotkových vektorů e. (Neobtěžujte se s distribucemi, uvažujte jen $R \neq a$, kde $\Theta' = 0$.) Jak zařídíte, aby byl vektorový potenciál spojitý?

Protože $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$, zvolíme $\vec{e} = \vec{e}_z$ a ověříme, že tento vektorový potenciál dá známé pole přímého vodiče vně válcové plochy a nulu uvnitř

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = \nabla[\Theta(R-a)f(R)] \times \vec{e}_z = \Theta(R-a)f'(R)\vec{e}_R \times \vec{e}_z = -\Theta(R-a)f'(R)\vec{e}_\phi,$$

pokud zvolíme $-f'(R) = \mu_0 I/(2\pi R)$, tedy

$$f(R) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ln\frac{a}{R}.$$

Volba čitatele uvnitř logaritmu zařídí, že $\vec{A}$ je spojitou funkcí radiální souřadnice.

Mimochodem, tato volba ospravedlňuje ignorování $\Theta'(x) = \delta(x)$, protože v jejím důsledku se δ-funkce objeví násobená 'nulovou' funkcí a z výsledného vztahu se vytratí.

Pro úplnost:

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\Theta(R-a)\ln\frac{a}{R}\vec{e}_z$$

3. Nalezněte vektorový potenciál $\vec{A}^{(2)}$ v podobném tvaru pro válcovou plochu o poloměru b (kde $b > a$), po níž teče rovnoměně rozložený proud I_2.

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\Theta(R-b)\ln\frac{b}{R}\vec{e}_z$$

4. Uvažujte superpozici obou ploch a z ní vyplývající superponovaný vektorový potenciál. Za předpokladu, že I_1, I_2 i $\mathcal{E}$ jsou nyní úměrné faktoru $e^{-i\omega t}$, nalezněte v rámci kvazistacionární aproximace elektrické pole v libovolném bodě prostoru.

Pochopitelně,

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla\Phi,$$

tedy pro $\partial_t \to -i\omega$ je nenulová složka elektrického pole jen

$$E_z = i\omega \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \Theta(R-a) \ln \frac{a}{R} + i\omega \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \Theta(R-b) \ln \frac{b}{R} + \mathcal{E}.$$

5. Přepokládejte, že podobně jako v bodě 1. platí pro proudy (plošný) Ohmův zákon. Jaký poměr I_2/I_1 nyní vyplývá pro poměr střídavých proudů frekvence ω?

Opět sestavíme rovnici spojující proudy a napětí, protože ale nyní záleží na poloměru místo jedné rovnice $U_H = R^{(1)} I_1 = R^{(2)} I_2$ budeme mít

$$\frac{1}{H} R^{(1)} I_1 = E_z(R=a) = 0 + 0 + \mathcal{E}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{H} R^{(2)} I_2 = E_z(R=b) = i\omega \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{a}{b} + 0 + \mathcal{E}. \tag{2}$$

Dosazení z první do druhé za $\mathcal{E}$ dostaneme

$$\frac{1}{H} R^{(2)} I_2 = E_z(R=b) = i\omega \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{a}{b} + 0 + \frac{1}{H} R^{(1)} I_1.$$

Rovnici teď vydělíme I_2, vynásobíme H a získáme

$$R^{(2)} \frac{I_2}{I_1} = -i\omega \frac{\mu_0 H}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + 0 + R^{(1)}.$$

Po zavedení veličiny s rozměrem indukčnosti

$$L = \frac{\mu_0 H}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

tak dostaneme

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R^{(1)} - i\omega L}{R^{(2)}} = \frac{r^{(1)} - i\omega L/H}{r^{(2)}}.$$

Interpretace je zřejmá, proud I_2 vytváří mezi válci magnetické pole a to se projeví jako indukčnost (resp. její reaktance) přičítající se k odporu vnitřního vodiče.