Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
10. 6. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Připomeňme definici funkce $\operatorname{sgn}(x)$: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$. Uvažujme nyní funkci $f(x) = \sin^2(x) \cdot \operatorname{sgn}(x)$.
   (a) [3 b.] Má funkce f derivaci v nule? Má v nule jednostranné derivace? Pokud ano, jaké jsou jejich hodnoty?
   (b) [3 b.] Existuje nějaký otevřený interval I obsahující nulu, na němž je funkce f ryze monotónní (tj. rostoucí nebo klesající)? Pokud ano, najděte co největší takový interval a určete, jestli je na něm funkce rostoucí nebo klesající.
   (c) [4 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy funkce f a určete, o jaký druh extrému se jedná (tj. zda globální či jen lokální, zda minimum či maximum).

2. (a) [3 b.] Napište, co to znamená, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá na* $\mathbb{R}$.
   (b) [3 b.] Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce a nechť $\alpha > 0$ je reálná konstanta. O funkci f řekneme, že je *α-lipschitzovská*, pokud pro každé $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| \le \alpha \cdot |x_1 - x_2|$. Dokažte, že pokud existuje $\alpha > 0$ takové, že funkce f je α-lipschitzovská, pak je f stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$. Zdá-li se vám to těžké, dokažte aspoň, že α-lipschitzovská funkce je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.
   (c) [4 b.] Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x)$. Dokažte, že pokud f je α-lipschitzovská pro nějaké $\alpha > 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|f'(x)| \le \alpha$.

3. (a) [3 b.] Napište definici pojmu *limita posloupnosti.*
   (b) [3 b.] Dokažte, že každá nerostoucí posloupnost má limitu.
   (c) [4 b.] Definujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ následovně: $a_1 = 1$ a pro každé $n > 1$ platí $a_n = \sin(a_{n-1})$. Dokažte, že posloupnost (a_n) má limitu a určete její hodnotu.

4. (a) [3 b.] Připomeňme, že křivku K v prostoru $\mathbb{R}^d$ jsme definovali jako spojitý obraz intervalu $I = [A, B]$, tedy $K = \{(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_d(x)) \in \mathbb{R}^d;\ x \in I\}$, kde $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ jsou spojité funkce. Napište vzorec pro délku takovéto křivky. Pokud ho neznáte, napište aspoň vzorec pro speciální případ, kdy uvažovaná křivka je graf funkce f na intervalu $I = [A, B]$.
   (b) [3 b.] Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je spojitá diferencovatelná funkce, jejíž derivace f' je také spojitá. Definujme funkci $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = 2f(x/2)$. Jaký je vztah mezi délkou grafu funkce f na intervalu $[0, 1]$ a délkou grafu g na intervalu $[0, 2]$?
   (c) [4 b.] Nechť R a H jsou kladné konstanty. *Šroubovice* o poloměru R a výšce H je křivka $K \subseteq \mathbb{R}^3$ popsaná následující parametrizací:
   $$K = \{(R\cos x, R\sin x, x) \in \mathbb{R}^3;\ x \in [0, H]\}.$$
   Spočítejte její délku. (Můžete při výpočtu využít vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, platný pro každé x.)