I. MECHANIKA

4. Soustava hmotných bodů I

Obsah

- Pojem soustavy hmotných bodů.
- Vazebné podmínky. Počet stupňů volnosti.
- Hmotný střed.
- Vnitřní a vnější síly.
- Hybnost, moment hybnosti.
- První a druhá impulsová věta.
- Těžišťová soustava souřadnic.
- Zákony zachování hybnosti a momentu hybnosti.
- Kinetická a potenciální energie soustavy hmotných bodů.
- Königova věta.
- Zákon zachování energie.
- Izolovaná soustava hmotných bodů.
- Problém dvou těles.
- Soustavy s proměnnou hmotností (Měščerského rovnice, Ciolkovského rovnice).
- Srážky těles.

Co rozumíme soustavou hmotných bodů

- N diskrétních hmotných bodů
- hmotnosti m_n pro $n = 1, \ldots N$ (nemění se průběžně)
- polohové vektory $\vec{r}_n(t)$ pro $n = 1, \ldots N$
- celková hmotnost soustavy $M = \sum_{n=1}^{N} m_n$

Základní druhy soustav hmotných bodů

1) *Volná soustava hmotných bodů*

- polohové vektory jednotlivých bodů jsou nezávislé
- uspořádání má 3*N* stupňů volnosti

2) *Tuhá soustava hmotných bodů*

- mezi jednotlivými hmotnými body neproměnné vzdálenosti

$$|\vec{r}_{mn}| = |\vec{r}_n - \vec{r}_m| = \mathrm{konst}$$

- polohu jednoznačně určíme zadáním 3 bodů – 9 parametrů
- svázány 3 rovnicemi pro 3 pevné vzdálenosti $\Rightarrow$ 6 nezávislých parametrů
- uspořádání má 6 stupňů volnosti

Hmotný střed soustavy hmotných bodů

další pohybové charakteristiky získáme ze znalosti časové závislosti polohových vektorů:

rychlost i-tého h.b. ... $\vec{v}_i(t) = \dfrac{d\vec{r}_i(t)}{dt}$

zrychlení i-tého h.b. ... $\vec{a}_i(t) = \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \dfrac{d\vec{v}_i(t)}{dt}$

hybnost i-tého h.b. ... $\vec{p}_i(t) = m_i\vec{v}_i(t)$

poloha hm. středu ... $\vec{r}_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\dfrac{m_i}{M}}_{w_i}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{w_i}_{\frac{m_i}{M}}\vec{r}_i$

rychlost hm. středu ... $\vec{v}_s = \dfrac{d\vec{r}_s}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\right) = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$

totéž jinak ... $\vec{v}_s = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i\vec{v}_i}_{\vec{p}_i} = \dfrac{1}{M}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}_{\vec{P}} = \dfrac{\vec{P}}{M}$

- celková hybnost soustavy $\vec{P} = M\vec{v}_s$ rovna hybnosti h.b. o hmotnosti *M* a rychlosti $\vec{v}_s$
- v hmotném středu nemusí ležet žádný z bodů soustavy

Pohybová rovnice *i*-tého bodu

na i-tý hmotný bod působí síla	$\vec{F}_i = m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$
výslednice externích sil působících na i-tý bod	$\vec{F}_i^E$
výslednice interních sil, jimiž na i-tý bod působí ostatní body	$\vec{F}_i^I$
celková síla na i-tý bod	$\vec{F}_i = \vec{F}_i^I + \vec{F}_i^E$
k-tý bod působí na i-tý bod silou	$\vec{F}_{ik}$
podle 3.NZ platí	$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$
kvůli sčítání zavedeme	$\vec{F}_{ii} = 0$
výslednice vnitřních sil působících na i-tý bod	$\vec{F}_i^I = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}$
pohybová rovnice i-tého bodu	$m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^E$

1. impulsová věta

pohybová rovnice i-tého bodu $$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^E$$

součet přes všechny body $$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}} = \boxed{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^E$$

protože $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ a $\vec{F}_{ii} = 0$ bude suma $N \times N$ členů $$\boxed{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} = 0}$$

z linearity derivace a konstantnosti hmotností m_i plyne

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

do výsledné rovnice zavedeme součtové veličiny $$\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \vec{v}_i}_{\vec{p}_i}}_{\vec{P}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^E}_{\vec{F}^E}$$

1. impulsová věta $$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}^E$$

Časová změna celkové hybnosti soustavy je rovna výslednici vnějších sil působících na soustavu.

1. impulsová věta

1. impulsová věta $$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}^E$$

integrální tvar 1. impulsové věty $$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^E dt$$

užijeme rychlost hmotného středu $$\vec{v}_s = \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

vyjádříme celkovou hybnost $$M\vec{v}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \vec{P}$$

dosadíme do 1. impulsové věty $$\frac{d}{dt}\vec{P} = M\frac{d\vec{v}_s}{dt} = M\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} = M\vec{a}_s = \vec{F}^E$$

věta o pohybu hmotného středu soustavy $$M\vec{a}_s = \vec{F}^E$$

Hmotný střed soustavy se pohybuje jako hmotný bod, který má hmotnost rovnu celkové hmotnosti soustavy a na nějž působí výslednice vnějších sil $\vec{F}^E$ působících na soustavu.

Důsledek: často lze s hmotným středem soustavy zacházet jako s hmotným bodem

Pohybová rovnice pro rotaci *i*-tého bodu

na i-tý hmotný bod působí moment síly a mění jeho točivost $\vec{M}_i = \frac{d\vec{b}_i}{dt}$

(pozor na značení: hmotnost soustavy M vs. moment sil $\vec{M}$)

vztažným bodem může být počátek v.s.s. $\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$

výslednice externích sil působících na i-tý bod $\vec{F}_i^E$

výslednice interních sil, jimiž na i-tý bod působí ostatní body $\vec{F}_i^I$

celková síla na i-tý bod $\vec{F}_i = \vec{F}_i^I + \vec{F}_i^E$

k-tý bod působí na i-tý bod silou $\vec{F}_{ik}$

podle 3.NZ platí $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$

kvůli sčítání zavedeme $\vec{F}_{ii} = 0$

výslednice vnitřních sil působících na i-tý bod $\vec{F}_i^I = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}$

pohybová rovnice i-tého bodu $\vec{r}_i \times \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^E \right) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$

Momenty působící na hmotné body

pohybová rovnice i-tého bodu

$$\vec{r}_i \times \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\,E} \right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

součet přes všechny body

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\,E} \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

rozdělíme levou stranu

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,E} \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

moment vnitřních sil

1. člen lze přepsat

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} \right)$$

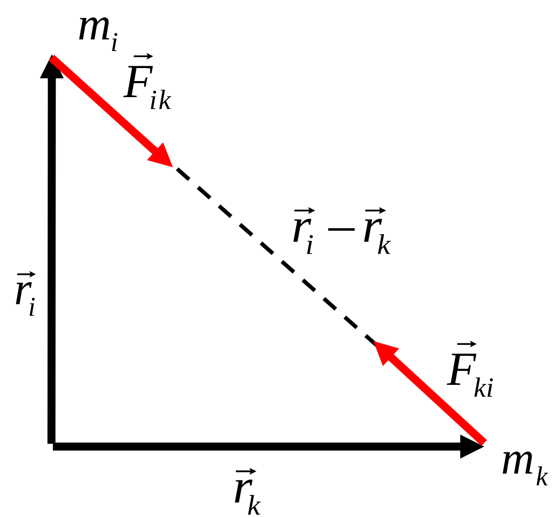
Výpočet momentu vnitřních sil

pro další úpravu momentu vnitřních sil použijeme trik

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ik}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ik}\right)+\underset{\text{jen přeznačení } k\leftrightarrow i}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_k\times\vec{F}_{ki}\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ik}\right)+\underset{\text{změna pořadí sumace}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{r}_k\times\vec{F}_{ki}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ik}+\vec{r}_k\times\underbrace{\vec{F}_{ki}}_{-\vec{F}_{ik}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ik}-\vec{r}_k\times\vec{F}_{ik}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\underbrace{\left(\left(\vec{r}_i-\vec{r}_k\right)\times\vec{F}_{ik}\right)}_{\left(\vec{r}_i-\vec{r}_k\right)\parallel\vec{F}_{ik}}=0$$

méně matematicky: vnitřní síly $\vec{F}_{ik}$ a $\vec{F}_{ki}$ leží v přímce a mají vzhledem k libovolnému bodu stejné rameno, proto se jejich momenty ruší



$\Rightarrow$

<u>celkový moment vnitřních sil je nulový vzhledem k libovolnému bodu prostoru</u>

2. impulsová věta

z linearity derivace plyne

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i \times \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ik}\right)}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,E}\right)}_{\vec{M}_i^{\,E}}}_{\vec{M}^{\,E}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\right)}_{\vec{b}_i} = \frac{d}{dt}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{b}_i}_{\vec{B}} = \frac{d}{dt}\vec{B}$$

2. impulsová věta

$$\frac{d}{dt}\vec{B} = \vec{M}^{\,E}$$

Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy je rovna výslednici momentů vnějších sil působících na soustavu. Předpokládá se, že všechny momenty jsou vyjádřeny k témuž bodu.

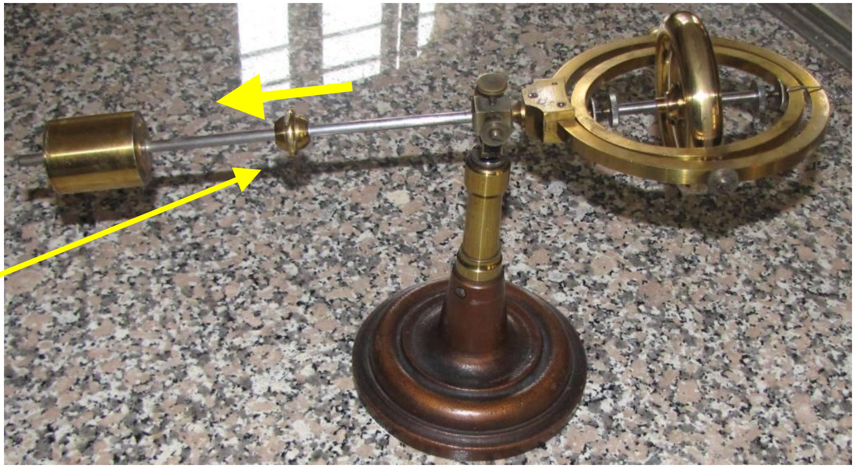
integrální tvar

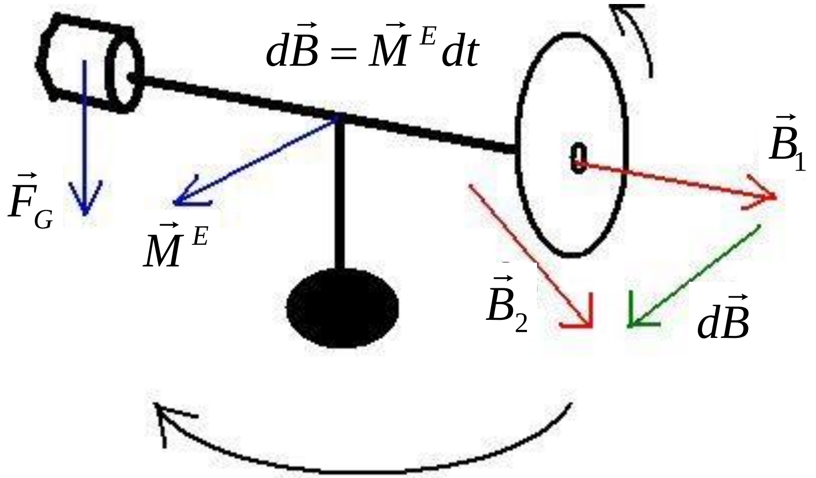
$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}^{\,E}\,dt$$

2. impulsová věta – Fesselův přístroj

experiment

- vyvážení hmotnosti setrvačníku
- roztočení setrvačníku
- vektor momentu hybnosti $\vec{B}_1$ setrvačníku je orientován souhlasně s osou rotace
- posun závaží doleva $\Rightarrow$ na rameno působí síla $\vec{F}_G$, což vyvolá moment síly $\vec{M}^E$
- impuls momentu síly je dle 2. i.v. roven změně momentu hybnosti
- ta se projeví otočením osy rotace setrvačníku ve směru šipky kolem svislé osy





Těžišťová soustava souřadnic

počátek vztažné soustavy spojen s hmotným středem soustavy hmotných bodů

- veličiny vyjádřené vzhledem k těžišťové soustavě označujeme indexem c
- ostatní veličiny jsou vyjádřeny vzhledem k laboratorní inerciální soustavě

rychlost soustavy v t.s.s. $\vec{v}_{cs} = 0$

celková hybnost v t.s.s. $\vec{P}_c = M\vec{v}_{cs} = 0$

můžeme také vyjít z Galileiho principu relativity:

rychlost *n*-tého bodu v t.s.s. $\vec{v}_{cn} = \vec{v}_n - \vec{v}_s$

hybnost *n*-tého bodu v t.s.s. $\vec{p}_{cn} = m_n\vec{v}_{cn} = m_n\vec{v}_n - m_n\vec{v}_s$

celková hybnost v t.s.s.

$$\vec{P}_c = \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_{cn} = \sum_{n=1}^{N} m_n\vec{v}_n - \sum_{n=1}^{N} m_n\vec{v}_s = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \underbrace{m_n\vec{v}_n}_{\vec{p}_n}}_{\vec{P}} - \vec{v}_s \underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n}_{M} = \vec{P} - M\vec{v}_s = 0$$

pro polohové vektory $\vec{r}_{cn} = \vec{r}_n - \vec{r}_s$

platí (viz definice $\vec{r}_s$) $\sum_{n=1}^{N} m_n\vec{r}_{cn} = \sum_{n=1}^{N} m_n\left(\vec{r}_n - \vec{r}_s\right) = \sum_{n=1}^{N} m_n\vec{r}_n - \vec{r}_s\sum_{n=1}^{N} m_n = 0$

Moment hybnosti v těžišťové soustavě

moment hybnosti soustavy v l.s.s. lze rozdělit na dvě části

$$\vec{B} = \sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \left(\underbrace{(\vec{r}_n - \vec{r}_s)}_{\vec{r}_{cn}} \times \underbrace{m_n \vec{v}_n}_{\vec{p}_n} \right) + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_s \times m_n \vec{v}_n \right)}_{\vec{r}_s \times \underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{v}_n}_{\vec{P} = M\vec{v}_s}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_{cn} \times \vec{p}_n \right)}_{\vec{B}_c} + \vec{r}_s \times M\vec{v}_s$$

ukážeme, že moment hybnosti soustavy vzhledem k hmotnému středu $\vec{B}_c$ je nezávislý na výběru počátku s.s. (vzhledem k němuž se měří rychlosti $\vec{v}_n$)

$$\vec{B}_c = \sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_{cn} \times \vec{p}_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_{cn} \times m_n \vec{v}_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_{cn} \times \underbrace{m_n \underbrace{(\vec{v}_n - \vec{v}_s)}_{\vec{v}_{cn}}}_{\vec{p}_{cn}} \right) + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_{cn} \times m_n \vec{v}_s \right)}_{\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_{cn} \right)}_{0} \times \vec{v}_s} = \sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_{cn} \times \vec{p}_{cn} \right)$$

Tedy moment hybnosti soustavy vzhledem k počátku laboratorní soustavy souřadnic $\vec{B}$ je roven součtu momentu hybnosti vzhledem k hmotnému středu $\vec{B}_c$ a momentu celkové hybnosti soustavy $\vec{r}_s \times M\vec{v}_s = \vec{r}_s \times \vec{P}$ vzhledem k počátku l.s.s. $\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{r}_s \times M\vec{v}_s = \vec{B}_c + \vec{r}_s \times \vec{P}$

Moment sil v těžišťové soustavě

podobně celkový moment sil v lab.s.s. (už víme, že moment vnitřních sil je vždy nulový)

$$\vec{M}^E = \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \times \vec{F}_n^E = \sum_{n=1}^{N} \left(\vec{r}_s + \vec{r}_{cn}\right) \times \vec{F}_n^E = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_s \times \vec{F}_n^E}_{\vec{r}_s \times \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n^E}_{\vec{F}^E}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_{cn} \times \vec{F}_n^E}_{\vec{M}_c^E} = r_s \times \vec{F}^E + \vec{M}_c^E$$

Výsledný moment vnějších sil $\vec{M}^E$ vzhledem k počátku laboratorní soustavy je roven součtu momentu vnějších sil $\vec{M}_c^E$ vzhledem k hmotnému středu soustavy hmotných bodů a momentu výslednice vnějších sil $\vec{r}_s \times \vec{F}^E$ působících na hmotný střed vzhledem k počátku laboratorní soustavy.

$$\vec{M}^E = \vec{M}_c^E + \vec{r}_s \times \vec{F}^E$$

2. impulsová věta vzhledem k těžišti

v inerciální laboratorní soustavě platí 1. a 2. impulsová věta

$$\frac{d}{dt}\vec{B} = \vec{M}^{E} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{B}_c + \vec{r}_s \times \vec{P}\right) = \vec{M}_c^{E} + \vec{r}_s \times \vec{F}^{E}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}^{E}}$$

$$\frac{d\vec{B}_c}{dt} + \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{r}_s}{dt}}_{\vec{v}_s} \times \underbrace{\vec{P}}_{M\vec{v}_s}}_{\underbrace{M\vec{v}_s \times \vec{v}_s}_{0}} + \vec{r}_s \times \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt}} = \vec{M}_c^{E} + \vec{r}_s \times \boxed{\vec{F}^{E}}$$

$$\frac{d\vec{B}_c}{dt} = \vec{M}_c^{E}$$

- rovnice analogická k 2. impulsové větě, ale je tu rozdíl:
    - 2.i.v. platí pro veličiny vyjádřené vzhledem k nepohyblivému bodu (například počátku laboratorní – inerciální – soustavy)
    - tato rovnice platí pro veličiny vyjádřené vzhledem k hmotnému středu soustavy hmotných bodů (a tento bod nemusí být v inerciální soustavě v klidu!)
- tato věta bude důležitá pro popis pohybu tuhého tělesa

Důsledky impulsových vět

Zákon zachování hybnosti

$$\vec{F}^{E} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} = \text{konst} \;\Rightarrow\; M\vec{v}_s = \text{konst} \;\Rightarrow\; \vec{v}_s = \text{konst}$$

Zákon zachování momentu hybnosti

$$\vec{M}^{E} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B} = \text{konst}$$

Pozor: Pokud předpoklad platí pro jeden – vhodně vybraný – vztažný bod, pak tvrzení platí také jen pro tento vztažný bod!

Práce a kinetická enegie

N hmotných bodů, působením sil $\vec{F}_n$ dojde k posunům o $d\vec{r}_n$

síla působící na n-tý h.b. $$\vec{F}_n = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{nk} + \vec{F}_n^E$$

celková práce mezi stavy $(A) \to (B)$ bude součtem $$W_{BA} = \sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_n$$

tedy $$W_{BA} = \sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{nk} + \vec{F}_n^E \right) \cdot d\vec{r}_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{nk} \cdot d\vec{r}_n}_{W_I} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \vec{F}_n^E \cdot d\vec{r}_n}_{W_E} = W_I + W_E$$

práce se rovná přírůstku kinetické energie soustavy $W_{BA} = W_I + W_E = E_k(B) - E_k(A) = \Delta E_k$

- kinetickou energii soustavy ovlivňují nejen vnější, ale ve volné soustavě i vnitřní síly!
- v tuhé soustavě se vzájemné vzdálenosti h.b. nemění, a proto tam vnitřní síly práci nekonají.
- ve volné soustavě se může změnit kinetická energie, i když na ni nepůsobí vnější síly!

Königova věta

kinetická energie soustavy je součtem K.E. jednotlivých h.b. $E_k = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n v_n^2$

uvažujme laboratorní (inerciální) soustavu souřadnic a těžišťovou s.s., jejichž pohyb propojuje Galileiho transformace $\vec{v}_n = \vec{v}_s + \vec{v}_{cn}$

$$E_k = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \left(\vec{v}_s + \vec{v}_{cn}\right) \cdot \left(\vec{v}_s + \vec{v}_{cn}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \left(\vec{v}_s^{\,2} + 2\vec{v}_{cn} \cdot \vec{v}_s + \vec{v}_{cn}^{\,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{v}_s^{\,2} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n}_{M} + \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{v}_{cn}\right)}_{\vec{P}_c = 0} \cdot \vec{v}_s + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec{v}_{cn}^{\,2}}_{E_{kI}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_s^{\,2} + E_{kI}$$

vztah $E_k = \frac{1}{2} M \vec{v}_s^{\,2} + E_{kI}$ (Königova věta) říká, že celková kinetická energie soustavy h.b. se rovná součtu kinetické energie bodu o hmotnosti soustavy pohybujícího se rychlostí hmotného středu a tzv. vnitřní kinetické energie soustavy h.b.

vnitřní kinetická energie je kinetická energie vypočtená v těžišťové soustavě

Potenciální energie

- N hmotných bodů v polohách $\vec{r}_n$ působí na sebe vzájemně (vnitřními) silami $\vec{F}_{mn}$
- předpokládejme pouze gravitační působení
- síla v poli tvořeném n-tým h.b. působí na m-tý $\vec{F}_{mn} = -\kappa \frac{m_n m_m}{r_{nm}^3} \vec{r}_{nm}$, kde $\vec{r}_{nm} = \vec{r}_m - \vec{r}_n$
- každý z bodů vytváří takové centrální pole (konzervativní)
- výsledné pole je superpozicí dílčích konzervativních polí, a tedy je též konzervativní
- při přechodu mezi stavy $(A) \to (B)$ vykonají vnitřní síly práci podle následující formule
- ukážeme, že součin $\vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_{nm}$ zahrnující práci vykonanou silou $\vec{F}_{nm}$ pro interakci n-tého a m-tého bodu je vždy zahrnut dvakrát; v předchozí definici W_I byly použity diferenciály $d\vec{r}_n$ pro jednotlivé body – proto je ve formuli faktor ½

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_{nm} = \sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2} \vec{F}_{nm} \cdot d(\vec{r}_m - \vec{r}_n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \sum_{m=1}^{N} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_m - \sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \sum_{m=1}^{N} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_n \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \sum_{m=1}^{N} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_m - \sum_{m=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_{mn} \cdot d\vec{r}_m \right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_m + \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_m \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_m + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_m \right) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_m = \sum_{n=1}^{N} \int_{(A)}^{(B)} \sum_{m=1}^{N} \vec{F}_{nm} \cdot d\vec{r}_m = W_I$$

Práce konzervativních vnitřních sil

práce vnitřních sil $W_I = -\frac{1}{2}\kappa \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}{}^{*} \int_{(A)}^{(B)} \frac{m_n m_m}{r_{nm}^2}\, dr_{nm} = \frac{1}{2}\kappa \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}{}^{*} m_n m_m \left(\frac{1}{r_{nm}(B)} - \frac{1}{r_{nm}(A)} \right)$

sumační znaménko označené hvězdičkou nezapočítává členy pro $m = n$ (pro ně jsme měli definováno $\vec{F}_{mm} = 0$ ze stejného důvodu).

$$W_I = \frac{1}{2}\kappa \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}{}^{*} m_n m_m \left(\frac{1}{r_{nm}(B)} - \frac{1}{r_{nm}(A)} \right) = \underbrace{\frac{1}{2}\kappa \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}{}^{*} \frac{m_n m_m}{r_{nm}(B)}}_{-E_{pI}(B)} - \underbrace{\frac{1}{2}\kappa \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}{}^{*} \frac{m_n m_m}{r_{nm}(A)}}_{-E_{pI}(A)}$$

vykonaná práce (vnitřních sil) je úbytkem vnitřní potenciální energie $W_I = E_{pI}(A) - E_{pI}(B)$.

pro nenulové, ale konzervativní vnější síly analogicky $W_E = E_{pE}(A) - E_{pE}(B)$

Zákon zachování mechanické energie

ZZME pro soustavu hmotných bodů $E_k + E_{pI} + E_{pE} = \mathrm{konst}$

důležité:

1) potenciální energie závisí na vzdálenostech, proto se nemění při změně vztažné soustavy

2) kinetická energie naopak závisí na rychlostech, proto se při změně vztažné soustavy mění (Königova věta); nemění se vnitřní kinetická energie E_{kI}

vnitřní energie soustavy h.b. $E_{kI} + E_{pI} = E_I$ se často užívá při diskusi pohybu s.h.b.

Potenciál *n*-tého bodu soustavy

zavedení potenciálu U_{nI} pro *n*-tý h.b.

$$E_{pI} = -\frac{1}{2}\kappa\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}{}^{*}\frac{m_n m_m}{r_{nm}}$$

$$E_{pI} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \underbrace{\left(-\kappa\sum_{m=1}^{N}{}^{*}\frac{m_m}{r_{nm}}\right)}_{U_{nI}}$$

$$E_{pI} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n U_{nI}$$

Izolovaná soustava hmotných bodů

$\vec{F}_n^E = 0 \rightarrow \qquad \vec{P} = \mathrm{konst} \rightarrow M\vec{v}_s = \mathrm{konst} \rightarrow \vec{v}_s = \mathrm{konst}$

$\vec{F}_n^E = 0 \rightarrow \quad \vec{M}_n^E = 0 \rightarrow \vec{B} = \mathrm{konst}$ (toto platí pro všechny vztažné body)

$E = \mathrm{konst}$

- celkem 7 nezávislých konstantních veličin
- zákony zachování zjednodušují výpočet (např. v případě pohybu s vazbovými silami)
- pohybové rovnice obsahují druhé derivace souřadnic (zrychlení), zatímco zákony zachování obsahují nejvýše první derivace (rychlosti)
- snížení řádu derivace $\rightarrow$ zákony zachování = prvé integrály pohybových rovnic

Problém dvou těles

gravitační interakce 2 těles, hmotnosti souměřitelné $\rightarrow$ nelze uvažovat, že se pohybuje jedno těleso v poli vytvořeném druhým nehybným

izolovaná soustava h.b. : 2 tělesa hmotností m_1 a m_2

jediná interakce $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -\kappa \dfrac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

pro $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ odpovídá funkci pro centrální sílu $\vec{F}(\vec{r}) = -f(\vec{r})\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ a ta je konzervativní

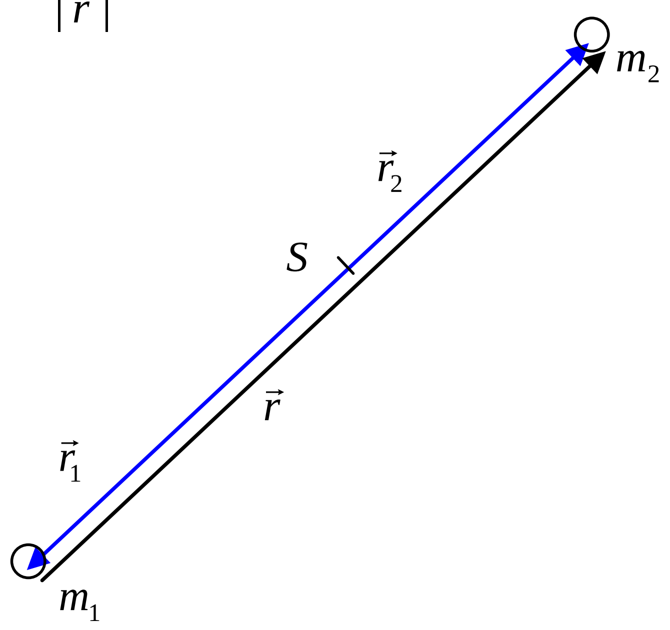
těžišťová soustava:

- $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$
- $\vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 = \vec{B}_0$

počátek souřadnic v hmotném středu:

- $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$
- $\vec{r}_1 = \dfrac{-m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$
- $\vec{r}_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$

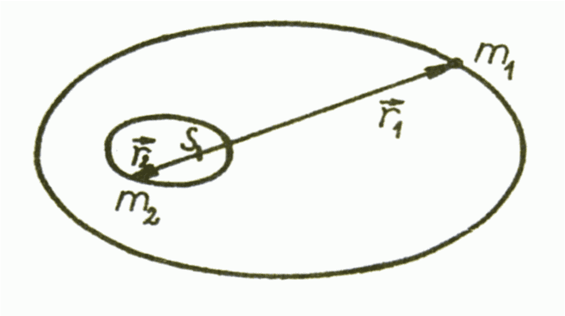
- $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$
- $\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \dfrac{-m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}$
- $\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}$



Problém dvou těles

konzervativní síly $\rightarrow$ ZZME:

- $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = E_0$ parametr $\alpha = \kappa m_1 m_2$ jako v řešení Keplerovy úlohy (KÚ)
- $\frac{1}{2}m_1\left(\frac{-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = E_0$
- $\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}v^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = E_0}$



zákon zachování momentu hybnosti:

- $\frac{-m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \times m_1 \frac{-m_2}{m_1+m_2}\vec{v} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \times m_2 \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v} = \vec{B}_0$
- $\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\vec{r} \times \vec{v} + \frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\vec{r} \times \vec{v} = \vec{B}_0 \rightarrow \boxed{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \times \vec{v} = \vec{B}_0}$

rovnice pohybu virtuální částice s redukovanou hmotností $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ se řeší pomocí KÚ

- $\frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}|} = E_0$
- $\vec{r} \times \mu \vec{v} = \vec{B}_0$

KÚ $\rightarrow$ $r = r(\varphi) \rightarrow r_1 = r_1(\varphi)$ a $r_2 = r_2(\varphi)$ - rozměry kuželoseček v převráceném poměru hmotností částic

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$; hmotný střed soustavy leží v jejich společném ohnisku

Soustavy s proměnnou hmotností

izolovaná soustava h.b. s hmotností M a rychlostí $\vec{v}$

- během času dt se oddělí část $dM < 0$ s rychlostí $\vec{v}_1$ (spaliny z raketového motoru)
- během času dt se připojí část $dM > 0$ s rychlostí $\vec{v}_1$ (kapka nabírá vlhkost při pádu)

zákon zachování hybnosti $\underbrace{\underbrace{(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})}_{\text{raketa}} - \underbrace{dM\vec{v}_1}_{\text{plyny}}}_{\vec{P}_2} = \underbrace{M\vec{v}}_{\vec{P}_1}$

nekonečně malou veličinu druhého řádu zanedbáme

$$M\vec{v} + dM\vec{v} + Md\vec{v} + \underbrace{dMd\vec{v}}_{\approx 0} - dM\vec{v}_1 = M\vec{v}$$

změna nastala za čas dt: $Md\vec{v} = (\vec{v}_1 - \vec{v})dM \rightarrow M\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}_r} = \underbrace{(\vec{v}_1 - \vec{v})}_{\vec{u}}\frac{dM}{dt}$

rovnice popisující zrychlení rakety (systém s proměnnou hmotností)

$$M\vec{a}_r = \vec{u}\,\frac{dM}{dt}$$

$\frac{dM}{dt} < 0 \rightarrow$ rel. rychlost výfukových plynů $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ a zrychlení rakety $\vec{a}_r$ mají opačný směr

Aplikace soustav s proměnnou hmotností

Působení vnější síly (gravitace):

$$\underbrace{\underbrace{(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})}_{\text{raketa}} - \underbrace{dM\vec{v}_1}_{\text{plyny}}}_{P_2} - \underbrace{M\vec{v}}_{\vec{P}_1} = \vec{F}_E dt$$

výsledná rovnice tvaru $$M\vec{a}_r = \underbrace{\vec{u}\frac{dM}{dt}}_{\text{reaktivní síla motoru}} + \vec{F}_E$$ ... Měščerského rovnice

Vícestupňová raketa

skalárně rovnice pro $\vec{F}_E = 0$: $$M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt}$$

zajímá nás, jaké rychlosti může vícestupňová raketa dosáhnout v závislosti na zásobě paliva

$$M\,dv = -u\,dM$$

řešení diferenciální rovnice za předpokladu $u = \mathrm{konst}$ separací proměnných

$$\int_{v_i}^{v_{i+1}} dv = -u\int_{M_{i0}}^{M_{ik}} \frac{dM}{M}$$

v_i a M_{i0} rychlost a hmotnost rakety před zažehnutím *i*-tého stupně, v_{i+1} a M_{ik} po jeho vyhoření

$$v_{i+1} - v_i = u\ln\underbrace{\frac{M_{i0}}{M_{ik}}}_{\text{Ciolkovského číslo}}$$ ... Ciolkovského rovnice

Balistické kyvadlo

měření rychlosti střely balistickým kyvadlem

ZZH: $$mv = (m+M)\,u$$

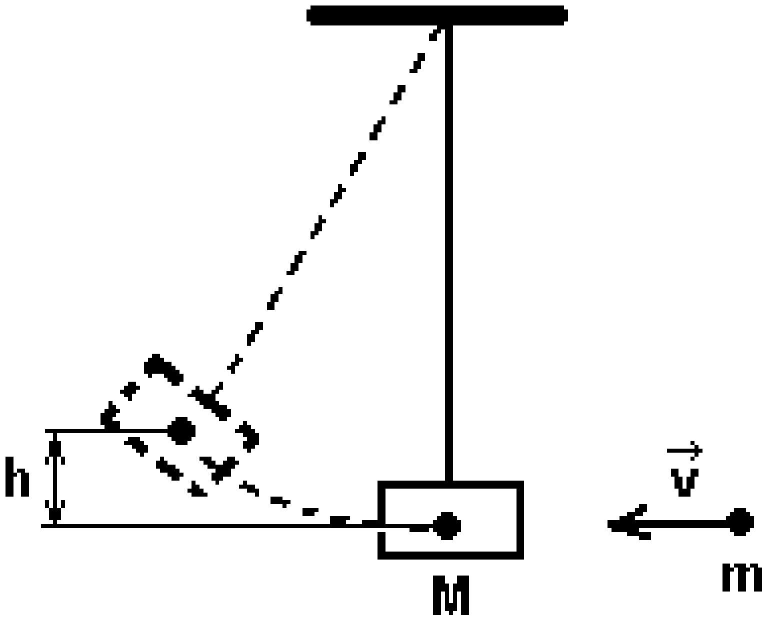
(proto nevadí, že při zachycení dojde k přeměně K.E. v teplo)

ZZME: $$\frac{1}{2}(m+M)\,u^2 = (m+M)gh$$

$\rightarrow$ $$\boxed{v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}}$$

A kolik energie se nepřemění v teplo?

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(m+M)gh}{\frac{1}{2}m\left(\frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}\right)^2} = \frac{m}{m+M}$$



Rázy těles

tělesa se dotknou v jediném bodě	**bod rázu**
bodem rázu vedena	**tečná rovina**
	normála k tečné rovině

ráz středový	hmotné středy na normále (v případě koulí vždy)
ráz výstředný	ostatní případy
ráz přímý	hmotné středy se před rázem pohybují po normále
ráz šikmý	ostatní případy
(dokonale) **nepružný ráz**	tělesa se spojí a pohybují jako jediné
(dokonale) **pružný ráz**	zachovává se celková kinetická energie
nedokonale pružný	odrazí se, ale celková kinetická energie po odrazu klesne

interakční síly

- vnitřní síly soustavy těles – nemění celkovou hybnost a moment hybnosti
- nesledujeme jejich detailní průběh

Rázy těles

počet stupňů volnosti

- rychlosti 6
- momenty hybnosti 6
- pozor: pokud nechápeme tělesa jako hmotné body, celkový moment hybnosti každého z nich zahrnuje 2 členy: vlastní moment hybnosti tělesa (vzhledem k jeho hmotnému středu) a moment hybnosti hmotného středu tělesa vůči vztažnému bodu (ten musí být stejný před a po rázu – např. bod rázu)

zákony zachování

- **hybnosti**
- **momentu hybnosti**
- **mechanické energie** (v případě pružného rázu)
- celkem 6 resp. 7 rovnic

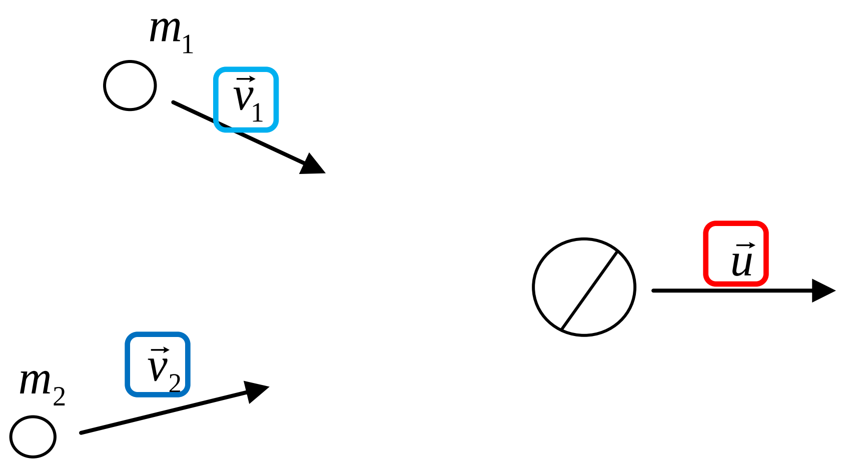
zjednodušení

- pouze postupný pohyb → 6 stupňů volnosti, 3 resp. 4 rovnice
- jen obecné zákonitosti
- nutné další informace o interakci

Nepružný ráz

jen 3 stupně volnosti – stačí ZZH

$$\left.\begin{array}{l} m_1, \boxed{\vec{v}_1} \\ m_2, \boxed{\vec{v}_2} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{u}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



energie přeměněná teplo

$$E_{\text{teplo}} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2}\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

Pružný ráz v přímce

2 stupně volnosti – ZZH, ZZME, skalární popis, kladný směr – zleva doprava

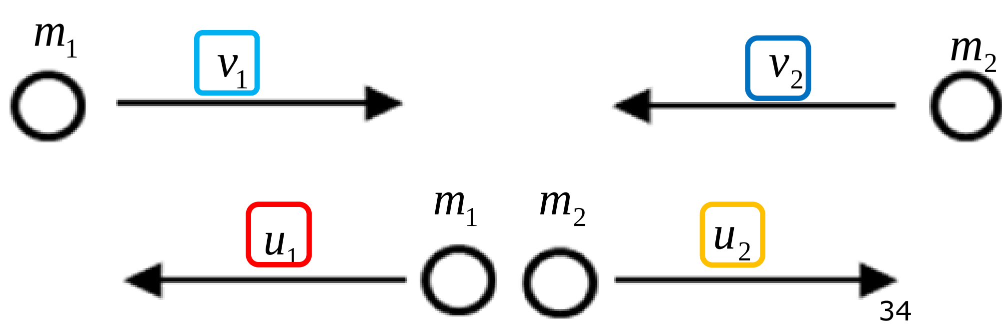
$$\left.\begin{matrix} m_1, \boxed{v_1} \\ m_2, \boxed{v_2} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \end{matrix}\right. \rightarrow \text{ řeší } \begin{matrix} u_1 = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2 \pm m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \\ u_2 = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2 \mp m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \end{matrix}$$

k rázu dojde jen pro $v_1 > v_2$ a pak musí platit $u_1 < u_2$

$$\begin{matrix} u_1 = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2 - m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \\ u_2 = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2 + m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \boxed{u_1} = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \\ \boxed{u_2} = \dfrac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{matrix}$$

spec. případ

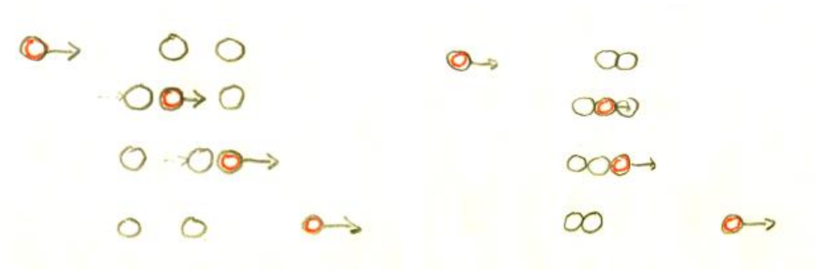
$$m_1 = m_2 \rightarrow \begin{matrix} u_1 = v_2 \\ u_2 = v_1 \end{matrix}$$



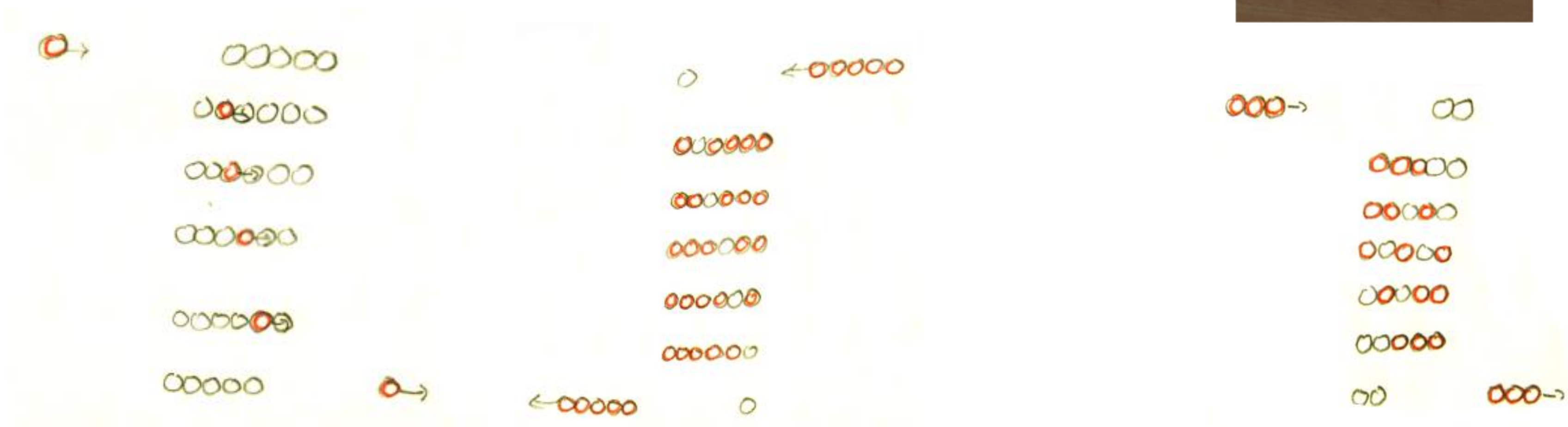
Pružný ráz v přímce

(spec.případ)^2

$$m_1 = m_2$$
$$v_1 = v \quad \rightarrow \quad u_1 = 0$$
$$v_2 = 0 \qquad\qquad u_2 = v$$



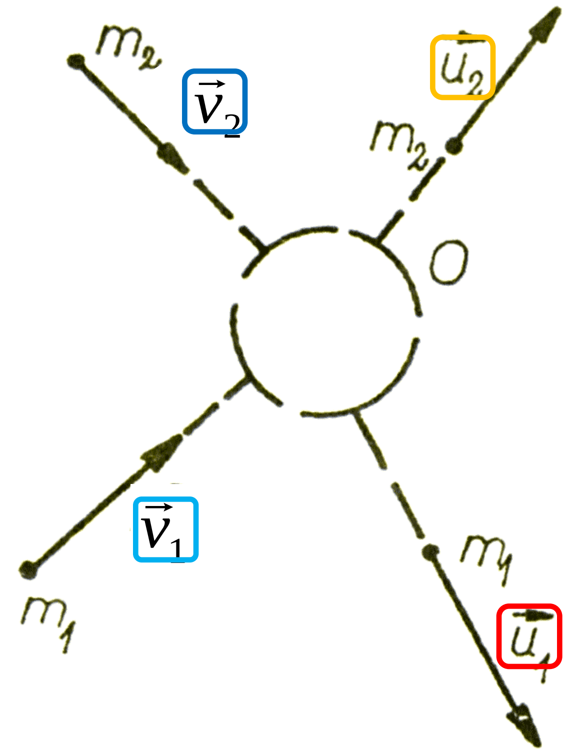
pozorování z různých vztažných soustav



Pružné srážky částic (hmotných bodů)

ZZH, ZZME – 4 rovnice pro 6 stupňů volnosti

$$\left.\begin{matrix} m_1, \boxed{\vec{v}_1} \\ m_2, \boxed{\vec{v}_2} \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\boxed{\vec{u}_1} + m_2\boxed{\vec{u}_2} \\ \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^{\,2} \end{cases}$$



rozbor v těžišťové soustavě souřadnic

transformace rychlostí do těžišťové soustavy

$$\left.\begin{matrix} m_1, \vec{v}_1 \\ m_2, \vec{v}_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{c1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_s \\ \vec{v}_{c2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_s \end{cases}$$

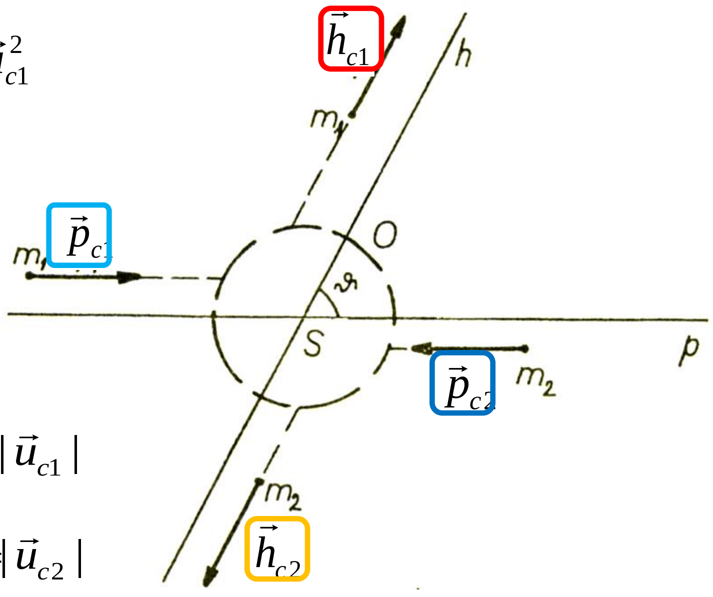
ZZH a ZZME v těžišťové soustavě

$$\left.\begin{matrix} m_1, \vec{v}_{c1} \\ m_2, \vec{v}_{c2} \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} m_1\vec{v}_{c1} + m_2\vec{v}_{c2} = 0 = m_1\vec{u}_{c1} + m_2\vec{u}_{c2} \\ \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{c1}^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{c2}^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_{c1}^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_{c2}^{\,2} \end{cases}$$

Pružné srážky částic (hmotných bodů)

z vlastností těžišťové soustavy plyne pro hybnosti:

$$\left.\begin{aligned}\boxed{\vec{p}_{c1}} &= m_1\vec{v}_{c1}\\ \boxed{\vec{p}_{c2}} &= m_2\vec{v}_{c2}\\ \boxed{\vec{h}_{c1}} &= m_1\vec{u}_{c1}\\ \boxed{\vec{h}_{c2}} &= m_1\vec{u}_{c2}\end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned}\vec{p}_{c1} &= -\vec{p}_{c2}\\ \vec{h}_{c1} &= -\vec{h}_{c2}\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}\vec{p}_{c1}^{\,2} &= \vec{p}_{c2}^{\,2}\\ \vec{h}_{c1}^{\,2} &= \vec{h}_{c2}^{\,2}\end{aligned} \rightarrow \left\{\begin{aligned}\vec{v}_{c2}^{\,2} &= \frac{m_1^2}{m_2^2}\vec{v}_{c1}^{\,2}\\ \vec{u}_{c2}^{\,2} &= \frac{m_1^2}{m_2^2}\vec{u}_{c1}^{\,2}\end{aligned}\right.$$



ZZME:

$$\tfrac{1}{2}m_1\vec{v}_{c1}^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\vec{v}_{c1}^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_1\vec{u}_{c1}^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\vec{u}_{c1}^{\,2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \tfrac{1}{2}m_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\vec{v}_{c1}^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\vec{u}_{c1}^{\,2} \qquad \rightarrow\ |\vec{v}_{c1}| = |\vec{u}_{c1}|$$

analogicky $\rightarrow\ |\vec{v}_{c2}| = |\vec{u}_{c2}|$

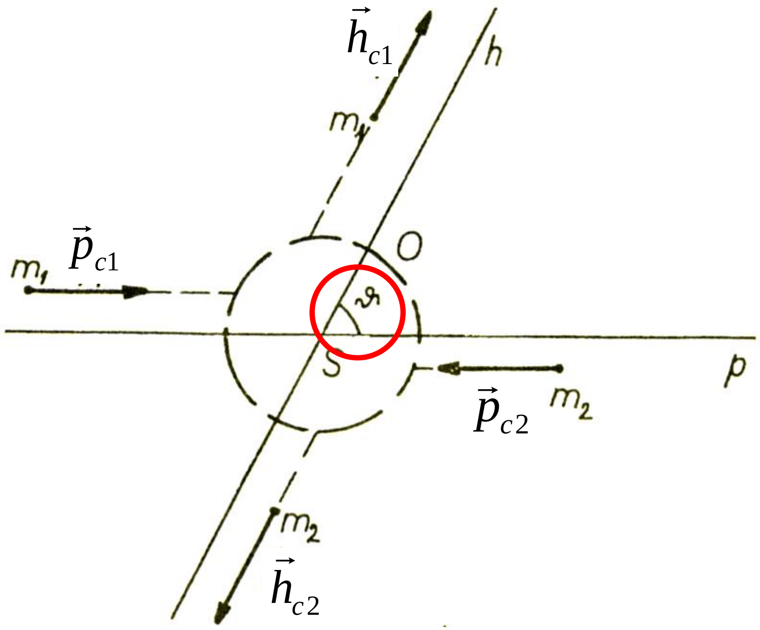
velikosti a směry rychlostí v t.s.s. vzájemně svázány

- každá z částic se pohybuje před i po srážce stejně velkou rychlostí
- částice se pohybují po společných přímkách před srážkou k sobě, po srážce od sebe

Pružné srážky částic (hmotných bodů)

velikosti a směry rychlostí v t.s.s. vzájemně svázány
- každá z částic se pohybuje před i po srážce stejně velkou rychlostí
- částice se pohybují po společných přímkách před srážkou k sobě, po srážce od sebe

zbývají přesto ještě dva úhly, k jejichž určení jsou nutné další informace
- jednou z nich může být zachování roviny pohybu určené výchozí hodnotou momentu hybnosti v původní s.s.
- je-li určena rovina, zbývá jediný parametr – úhel ϑ



jiná možnost
- dva směrové úhly odpovídají zadání jednotkového vektoru $\vec{n}$ ve směru pohybu jedné z částic po srážce (použije se v dalším výpočtu)

Pružné srážky částic (hmotných bodů)

z vlastností těžišťové soustavy plyne pro rychlosti (viz např. problém dvou těles):

$$\vec{v} = \vec{v}_{c1} - \vec{v}_{c2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad \vec{u} = \vec{u}_{c1} - \vec{u}_{c2} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

$$\vec{v}_{c1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \qquad \vec{u}_{c1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{u}$$

$$\vec{v}_{c2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \qquad \vec{u}_{c2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{u}$$

víme, že platí $|\vec{v}_{c1}| = |\vec{u}_{c1}|$, resp. $|\vec{v}_{c2}| = |\vec{u}_{c2}|$, a proto $|\vec{v}| = |\vec{u}|$

rychlosti po srážce tedy můžeme vyjádřit na základě

- velikostí plynoucích z rozboru
- směrového vektoru pohybu jedné z částic po srážce (druhá se pohybuje po stejné přímce v opačném směru)

$$\vec{u}_{c1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\vec{v}|\vec{n}$$

$$\vec{u}_{c2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}|\vec{v}|\vec{n}$$

Pružné srážky částic (hmotných bodů)

pak rychlosti v původní vztažné soustavě budou (převod zpět z t.s.s.)

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_{c1} + \vec{v}_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}| \vec{n} + \underbrace{\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}}_{\vec{v}_s}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_{c2} + \vec{v}_s = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}| \vec{n} + \underbrace{\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}}_{\vec{v}_s}$$

pro hybnosti dostaneme

$$\vec{h}_1 = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu} |\vec{v}| \vec{n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \mu |\vec{v}| \vec{n} + \frac{\mu}{m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

$$\vec{h}_2 = \underbrace{\frac{-m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{-\mu} |\vec{v}| \vec{n} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = -\mu |\vec{v}| \vec{n} + \frac{\mu}{m_1}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$