

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkouška z Kombinatoriky a grafů I — písemná část, 7. 2. 2025

Čas: 90 minut

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit, pokud není řečeno jinak.*
- *Číselné výsledky (např. typu $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$) není nutno dále upravovat a dopočítávat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutné uvést, které tvrzení používáte.*

-
1. Necht' $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost definovaná soustavou rekurencí

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5 \quad \text{pro každé } n \geq 2.$$

Najděte vzorec v uzavřeném tvaru, tj. bez nekonečných sum, pro vytvářející funkci této posloupnosti (nemusíte hledat vzorec v uzavřeném tvaru pro samotné a_n). [5 bodů]

2. Zformulujte a dokažte co nejtěsnější horní a dolní odhad na prostřední kombinační číslo $\binom{2n}{n}$. (Rozumí se, že hodnotu $\binom{2n}{n}$ chceme odhadnout pomocí jednodušších výrazů, tedy bez použití faktoriálů a kombinačních čísel.) [10 bodů]
3. Definujte, co je *systém různých reprezentantů* v hypergrafu. Pro přirozené číslo $n \geq 3$ označme H_n hypergraf s množinou vrcholů $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$, jehož hyperhrany jsou právě všechny tříprvkové podmnožiny V_n . Pro které hodnoty $n \geq 3$ má hypergraf H_n systém různých reprezentantů? [5 bodů]
4. Zformulujte a dokažte Spernerovu větu, která mluví o antiretězcích v uspořádání množin pomocí inkluze. [10 bodů]