ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 1, ZS 2021-22

PÍSEMKA ČÍSLO 4, VERZE 8.2.2022

(1)(14 bodů) (a) Ukažte, že funkce

$$f(x) = \frac{\arccos\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)}{\sqrt{3x}}$$

je definována na nějakém pravém prstencovém okolí bodu 0.

(b) Spočtěte limitu (pokud existuje)

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) \,.$$

(2)(14 bodů) Spočtěte jednostranné derivace a derivace funkce f ve všech bodech, kde existují, pokud

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2) \cdot (\operatorname{arctg}(x+2))^4 \;.$$

(3)(20 bodů) Uvažujme reálnou funkci f danou jako

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x+1}{x+2}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \\ 0, & x = -2\,. \end{cases}$$

(a) Nalezněte jednostranné limity v bodech $-\infty, \infty, -2$.
(b) Určete obor hodnot funkce f.
(c) Nalezněte (i jednostranné) derivace funkce f v každém bodě $\mathbb{R}$.
(d) Nalezněte druhou derivaci v každém bodě, kde existuje.
(e) Určete inflexní body funkce f.
(f) Nalezněte asymptoty funkce f v bodě $-\infty$ a ∞.
(g) Načrtněte graf funkce f.

(4)(12 bodů) Rozhodněte, zda existuje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se spojitou druhou derivací na $\mathbb{R}$, která není ani konvexní ani konkávní na žádném intervalu v $\mathbb{R}$.

IV. 1.

a) $\frac{\log(1+x)}{x} < 1,\ x > 0$ Ať $f(x) = x - \log(1+x)$, pak pro $x \geq 0$ platí:

$\log(1+x) < x,\ x > 0$. $f(0) = 0,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0,\ x > 0$, tedy

$x - \log(1+x) > 0,\ x > 0$ f roste na $[0,\infty)$, proto $f(x) > 0,\ x > 0$.

Tedy $\frac{\log(1+x)}{x} < 1$ pro $x > 0$, tedy $f(x)$ je dobře definována na $P_+(0,1)$.

b) $g(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$, pak $f(x) = \frac{\arccos g(x)}{\sqrt{1-g(x)}} \sqrt{\frac{1-g(x)}{3x}}$

• $\frac{1-g(x)}{3x} = \frac{1}{3x}\left(1 - \frac{\log(1+x)}{x}\right) = \frac{1}{3x}\left(\frac{x-\log(1+x)}{x}\right) = \frac{x - \log(1+x)}{3x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$, neboť

$l'H: \frac{0}{0}: \frac{1-\frac{1}{1+x}}{6x} = \frac{1+x-1}{6x(1+x)} = \frac{1}{6(1+x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$

• $\lim_{y\to 1} \frac{\arccos y}{\sqrt{1-y}} \overset{l'H}{\underset{0/0}{=}} \lim \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}}{-\frac{1}{2}(1-y)^{-1/2}} = \lim \frac{2\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-y^2}} = \lim \frac{2\cancel{\sqrt{1-y}}}{\cancel{\sqrt{1-y}}\sqrt{1+y}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{2}$

Tedy $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

↑ podmínka (P) ↖ spojitost $\sqrt{\ }$

Bodování:

a) ... +5 bodů

b) arccos ... +3

$\frac{1-g(x)}{3x}$ ... +~~5~~4

dopočet ... +2

IV. 2.

$$f(x) = \mathrm{sgn}(\overset{(x+2)(x-1)}{x^2+x-2})\left(\mathrm{arctg}\,(x+2)\right)^4, \; x \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{cases} (\mathrm{arctg}\,(x+2))^4 & \text{-- } x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty) \\ 0 & \text{-- } x \in \{-2,1\} \\ (\mathrm{arctg}\,(x+2))^4(-1) & \text{-- } x \in (-2,1) \end{cases}$$

$$\cdot\; f'(x) = \begin{cases} 4\,\mathrm{arctg}\,(x+2))^3 \cdot \dfrac{1}{1+(x+2)^2} & \text{-- } x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty) \\ (-1) \quad \text{—} \quad \text{//—} & \text{-- } x \in (-2,1) \end{cases}$$

$$\cdot\; f'_+(1) = \lim_{x\to 1_+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1_+} \frac{(\mathrm{arctg}\,(x+2))^4}{x-1} = \infty$$

$$\cdot\; f'_-(1) = \lim_{x\to 1_-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1_-} \frac{-(\mathrm{arctg}\,(x+2))^4}{x-1} = \infty$$

$$\Bigg\} \; f'(1) = \infty$$

$$\cdot\; f'_+(-2) = \lim_{x\to -2_+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2_+} \underbrace{\frac{(-1)(\mathrm{arctg}\,(x+2))^4}{(x+2)^4}}_{\to 1} (x+2)^3 = 0$$

$$\left[\frac{\mathrm{arctg}\,y}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \right]$$

$$\cdot\; f'_-(-2) = \lim_{x\to -2_-} \frac{(\mathrm{arctg}\,(x+2))^4}{(x+2)^4}(x+2)^3 = 0 \quad \Rightarrow f'(-2) = 0$$

Bodování: rozepis f .... +3

f' --- --. +4

jednostranné derivace .. + 3+4

IV. 3.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x+1}{x+2}} = e^{-1}e^{\frac{1}{x+2}} \\ 0 \quad \dots \ x = -2 \end{cases}$$, f spojitá na $(-\infty,-2), (-2,\infty)$

a) $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{-1}$ $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} e^{-1}$ $f(x) \xrightarrow[x\to-2_+]{} \infty$, $f(x) \xrightarrow[x\to-2_-]{} 0$

f spojitá na $(-\infty,-2]$

c)+b) $f'(x) = e^{-1}e^{\frac{1}{x+2}} \frac{-1}{(x+2)^2}$, $x \neq -2$

$f'_+(-2) = \lim_{x\to-2_+} \frac{f(x)}{x+2} = \infty$ $f'_-(-2) = \lim_{x\to-2_-} \frac{f(x)}{x+2} = 0$, neboť

$\left[\frac{e^{\frac{1}{x+2}}}{x+2} \xrightarrow[x\to-2_-]{} 0 \right.$, neboť $\left. te^t \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \right]$

Tedy f klesá na $(-\infty,-2]$, $(-2,\infty)$. Tedy

$f(\mathbb{R}) = [0,e^{-1}) \cup (e^{-1},\infty)$

d) $f''(x) = e^{-1}\left(e^{\frac{1}{x+2}} \frac{1}{(x+2)^4} + e^{\frac{1}{x+2}} \frac{2}{(x+2)^3}\right) = e^{-1}e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{1}{(x+2)^4}\right)\left[1+2(x+2)\right] =$

$= e^{-1}e^{\frac{1}{x+2}} \frac{1}{(x+2)^4} (2x+5)$, $x \neq -2$

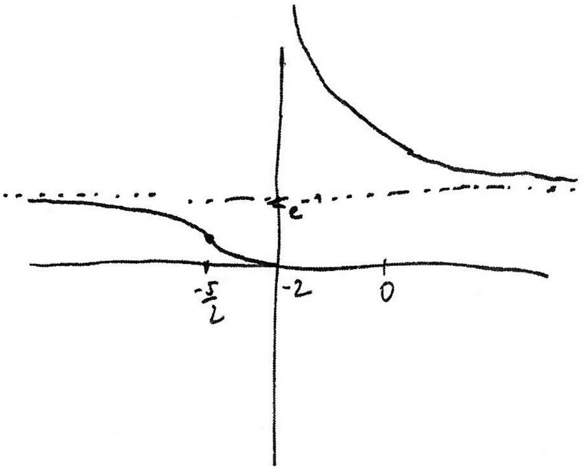
$\Rightarrow$ $\underset{-\frac{5}{2}}{|}$ $\underset{-2}{|}$: $-$, $+$, $+$ tedy f konkávní na $(-\infty, -\frac{5}{2}]$

konvexní na $[-\frac{5}{2}, -2]$

konvexní na $(-2,\infty)$

e) V $-5/2$ je inflexní bod.

f asymptoty v $\pm\infty$ je $y = e^{-1}$



Bodování:
- limity ... +2
- f' ... +2
- $R(f)$ ... +3
- f'' ... +3
- inflexe ... +3
- asymptoty ... +3 · graf +4

IV. 4.

Ať f'' spojitá na $\mathbb{R}$ pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pokud existuje $y \in \mathbb{R}$, že $f''(y) > 0$, pak $f'' > 0$ na nějakém okolí y ze spojitosti f'', tedy f ~~konkávní~~ konvexní na tomto intervalu.

Podobně pokud existuje $y \in \mathbb{R}$, že $f''(y) < 0$, je f konkávní na vhodném okolí y.

Pokud $f'' = 0$ na $\mathbb{R}$, je $f'(x) = a$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, a tedy $f(x) = ax + b$ pro nějaké $b \in \mathbb{R}$. Tedy f konvexní i konkávní na $\mathbb{R}$.

Bodování + 12