

I. MECHANIKA

1. Kinematika hmotného bodu



Obsah

- prostor, čas, hmotný bod
- vztažná soustava, trajektorie, dráha, průměrná a okamžitá rychlost, zrychlení
- pojmy derivace a integrálu
- složky vektoru, polohový vektor, skládání rychlosti
- tečná a normálová složka zrychlení, dostředivé zrychlení
- klasifikace pohybu (přímočarý x křivočarý, rovnoměrný x nerovnoměrný)
- rovnoměrný kruhový pohyb
- harmonický pohyb po přímce

Vývoj základních pojmů kinematiky

kiné = pohyb

hmotné objekty existují v prostoru a času, „zabírají“ určitou část prostoru, polohy se s časem mění

prostor

- antická představa (Aristoteles) – 2 oblasti s různými zákonitostmi (prostor okolo Země x oblast pohybu nebeských těles)
- empirická pozorování a experimenty → teorie gravitace + Keplerovy zákony → na Zemi i ve vesmíru stejné zákonitosti pohybu → *absolutní* prostor nezávislý na hmotných objektech a jejich pohybech (Newton)
- *axiom (Newton) : „Absolutní prostor je vzhledem ke své podstatě a bez ohledu na vnější objekty stále týž a nepohyblivý.“*
- **prostor – trojrozměrné (3 nezávislé údaje) kontinuum (spojitá změna vzdálenosti)**

čas

- odvozen od doby trvání objektivně existujících procesů, později pohyb Slunce po obloze, pak pohyb hvězd, měření času aktuálně odvozeno od kmitů krystalu
- *axiom (Newton) : „Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně a bez ohledu na vnější objekty.“*
- **čas – spojitý parametr společný všem objektům nezávisle na jejich pohybu (rychlosti)**

vliv objektů na prostor a čas

- tělesa (pohybem i hmotností) působí na geometrii prostoročasu (Einstein - teorie relativity)

Základní matematické abstrakce

prostor a čas nezávislé na hmotných objektech

- prostor je trojrozměrné kontinuum (Eukleidovský prostor)
- čas je jednorozměrné kontinuum

hmotný bod (vhodnější by bylo „bodová hmotnost“ analogicky k „bodovému náboji“)

- bezrozměrný (nekonečně malý)
- nemůže se ani deformovat ani rotovat
- abstraktní
- přesto lze takto s dostatečnou přesností popisovat řadu objektů (subatomární částice, resp. atomy ve srovnání s velikostí těles, planety ve srovnání s velikostí sluneční soustavy)
- reálná tělesa lze popisovat jako soustavy hmotných bodů (později)

vztažná soustava (vztažný systém, soustava souřadná)

- soustava souřadnic, vůči níž se stanovuje poloha hmotného bodu

Trajektorie

Skalární charakteristiky pohybu

Trajektorie

- geometrická křivka v prostoru, kterou hmotný bod při pohybu opisuje
- dle tvaru trajektorie rozlišujeme pohyb přímočarý a křivočarý (kruhový,...)

Dráha s

- délka trajektorie, kterou hmotný bod proběhne za čas $\Delta t = t_2 - t_1$

Parametrizace polohy

- $t \rightarrow s(t)$ parametrizace časem (vhodná pro zkoumání rychlosti)

Rychlost v – 2 významy, zde ve významu „speed“

- skalární veličina
 - údaj na tachometru
 - nezáleží na směru
 - lze i pro uzavřenou trajektorii (křeček v bubínku, dítě na kolotoči)

Skalární charakteristiky pohybu

Rychlost v

- délka dráhy $\Delta s = s_2 - s_1$ uražené za určitý čas $\Delta t = t_2 - t_1$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

- přesněji: zavedli jsme průměrnou rychlost v intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$
- (měli bychom psát $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$)
- zkracováním intervalu $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme okamžitou rychlost
- musíme znát s pro všechna t neboli dále předpokládáme znalost fce $s(t)$
- $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \equiv \frac{ds}{dt}$ (zavedli jsme symbol derivace)

Derivace

Mějme funkci $y = f(x)$ definovanou v bodě x_0 .

Derivací rozumíme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$,

označujeme $f'(x_0)$.

Podle obrázku výraz $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$

je směrnice sečny.

Limita pro $\Delta x \rightarrow 0$ je směrnice tečny v bodě x_0 .

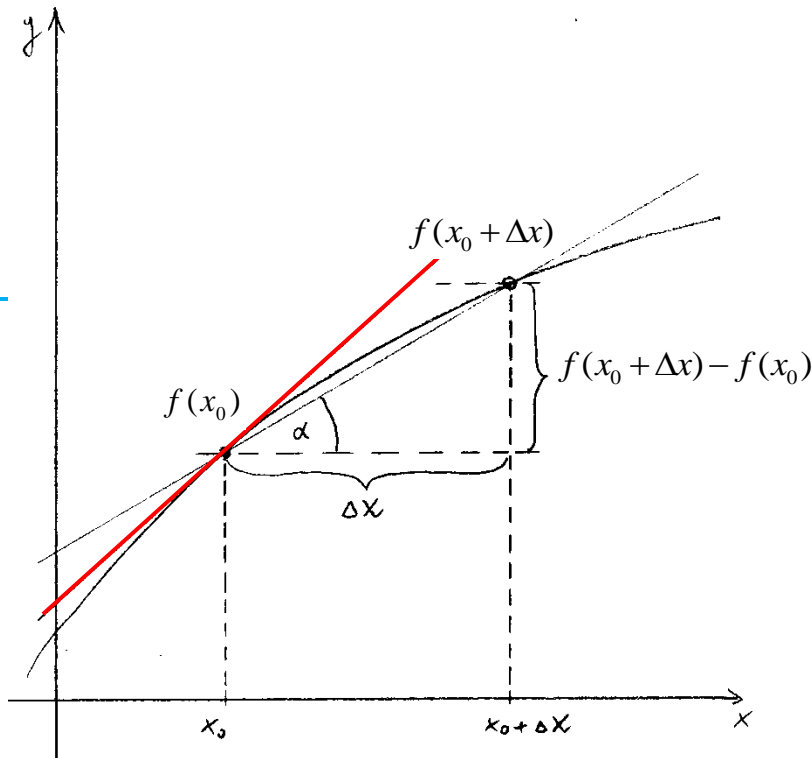
Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$, říkáme, že má v (a, b)

derivaci. Označujeme ji $f'(x)$, $y'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{d}{dx} y(x)$, y' , f' , $(f(x))'$.

Zjednodušení zápisu v případě, kdy nemůže dojít k omylu $y' = \frac{dy}{dx}$, pokud

$y = y(x)$. Podobně $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$, pokud $s = s(t)$. (Toto zavedl I. Newton v díle

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)



Skalární charakteristiky pohybu

Rychlost $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \equiv \frac{ds}{dt}$ lze zapsat ve tvaru $v = \dot{s}$, přesněji $v(t) = \dot{s}(t)$

Rovnoměrný pohyb $v = \dot{s} = \text{konst}$

nezáleží na směru pohybu

příkladem může být pohyb po kružnici s konstantní úhlovou rychlostí

vs.

Nerovnoměrný pohyb $v = \dot{s} \neq \text{konst}$

opačná úloha k derivování – hledání primitivní funkce

známe $v(t)$ a chceme znát $s(t)$: $s(t) = \int v(t) dt$

Primitivní funkce (neurčitý integrál)

Funkce $F(x)$ je v intervalu (a,b) primitivní funkce k funkci $f(x)$, jestliže pro $\forall x \in (a,b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Víme, že } C' = 0 \Leftrightarrow C = \text{konst} \\ (f + g)' = f' + g' \end{array} \right\} (F(x) + C)' = F'(x) + \underbrace{C'}_{=0} = F'(x) = f(x)$$

To znamená, že pokud $F(x)$ je primitivní funkce $\Rightarrow F(x) + C$ je také primitivní funkce.

Symbolický zápis: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Skalární charakteristiky pohybu

Zrychlení a

zkoumáme změnu rychlosti v čase

- změna rychlosti $\Delta v = v_2 - v_1$ dosažená za určitý čas $\Delta t = t_2 - t_1$

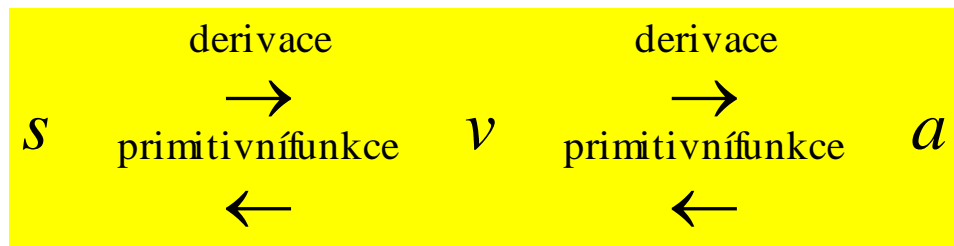
- $$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

- analogicky jde o průměrné zrychlení v intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$

- (měli bychom psát $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$)

- okamžité zrychlení zavedeme derivací

- $$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$



Příklad – pohyb rovnoměrně zrychlený

1) Známe vztah pro dráhu – derivováním vypočteme rychlost

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

Známe derivace:

$$y = x^n \quad \rightarrow \quad y' = nx^{n-1}$$

$$y = C \cdot f(x) \quad \rightarrow \quad y' = C \cdot f'(x)$$

$$y = f(x) + g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) + g'(x)$$

Tedy

$$v = \dot{s}(t) = \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 \right) + (v_0 t) + \dot{s}_0 = \frac{1}{2} a_0 (\dot{t}^2) + v_0 (\dot{t}) + \dot{s}_0 = \frac{1}{2} a_0 2t + v_0 + 0 = a_0 t + v_0$$

2) Známe rychlost – derivováním vypočteme zrychlení

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$a = \dot{v} = (\dot{a}_0 t) + \dot{v}_0 = a_0 \underbrace{\dot{t}}_{=1} + \underbrace{\dot{v}_0}_{=0} = a_0$$

Příklad – pohyb rovnoměrně zrychlený

3) Známe vztah pro rychlost – dráhu vypočteme pomocí primitivní funkce

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

Známe primitivní funkce:

$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f(x) = C \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad F(x) = C \cdot G(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \rightarrow \quad F(x) = G(x) + H(x)$$

Tedy

$$\begin{aligned} s(t) &= \int v(t) dt = \int (a_0 t + v_0) dt = a_0 \int t dt + v_0 \int t^0 dt = \\ &= a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 \frac{t^1}{1} + \underbrace{s_0}_{\text{int.konstanta}} = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0 \end{aligned}$$

4) Známe zrychlení – rychlost hledáme jako primitivní funkci

$$a = a_0$$

$$v = \int a dt = \int a_0 dt = a_0 \int dt = a_0 \frac{t^1}{1} + \underbrace{v_0}_{\text{int.konstanta}} = a_0 t + v_0$$

Příklad – volný pád

- souřadnicová osa h orientovaná směrem dolů
- všechny vektory – nenulové jen svislé složky
- možno užít skalární vztahy

v čase $t = 0$

$$v = 0$$

$$h = 0$$

gravitační zrychlení

$$a = g$$

rychlost

$$v = \int g dt = gt + v_0 \quad \rightarrow \quad v = gt$$

dráha (výška)

$$h = \int gt dt = g \frac{t^2}{2} + h_0 \quad \rightarrow \quad h = g \frac{t^2}{2}$$

zrychlení v závislosti na výšce a době pádu

$$g = \frac{2h}{t^2}$$

vytlačení parametru t

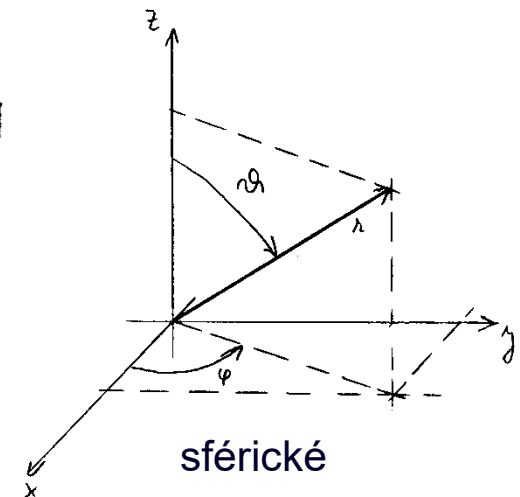
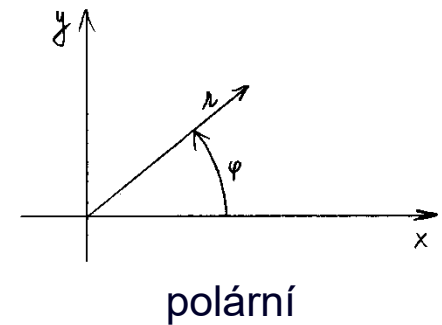
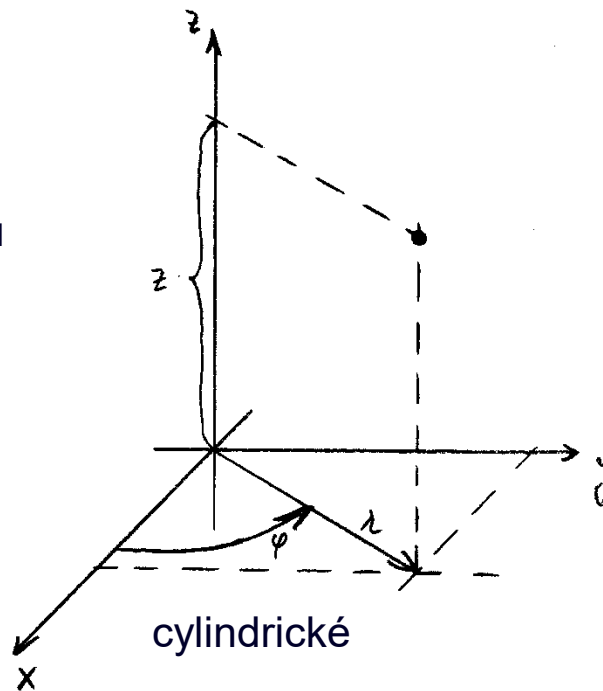
$$t = \frac{v}{g} \quad \rightarrow \quad h = \frac{g}{2} \left(\frac{v}{g} \right)^2 = \frac{v^2}{2g}$$

rychlost v závislosti na výšce pádu

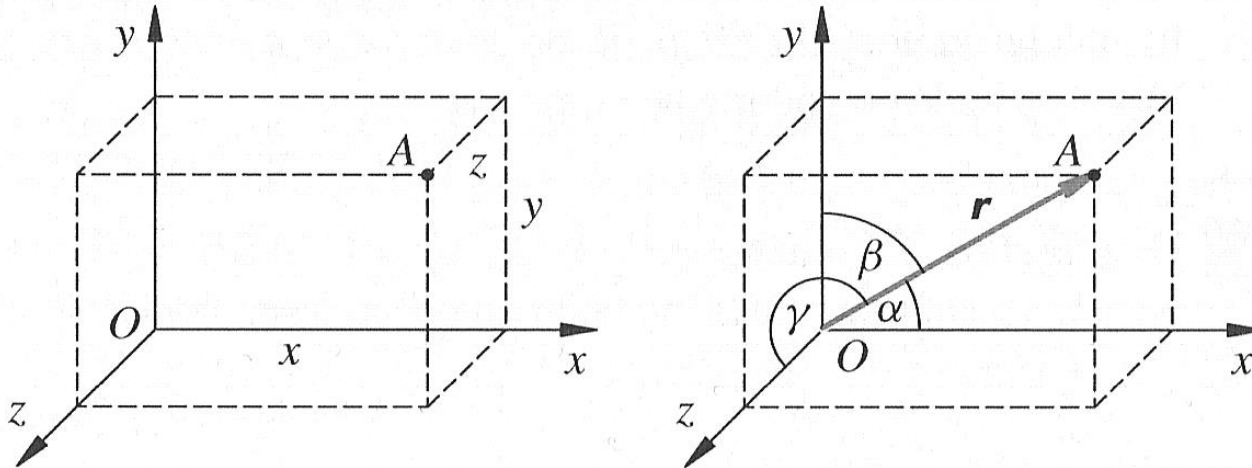
$$v = \sqrt{2gh}$$

Souřadnice bodu

- v třídímenzionálním prostoru
- $[x_1, x_2, x_3]$ nebo $[x, y, z]$
- typy souřadnic v rovině
 - kartézské
 - polární
- typy souřadnic v prostoru
 - kartézské
 - cylindrické
 - sférické



Směrové kosiny



r ... vzdálenost bodu od počátku kartézských souřadnic

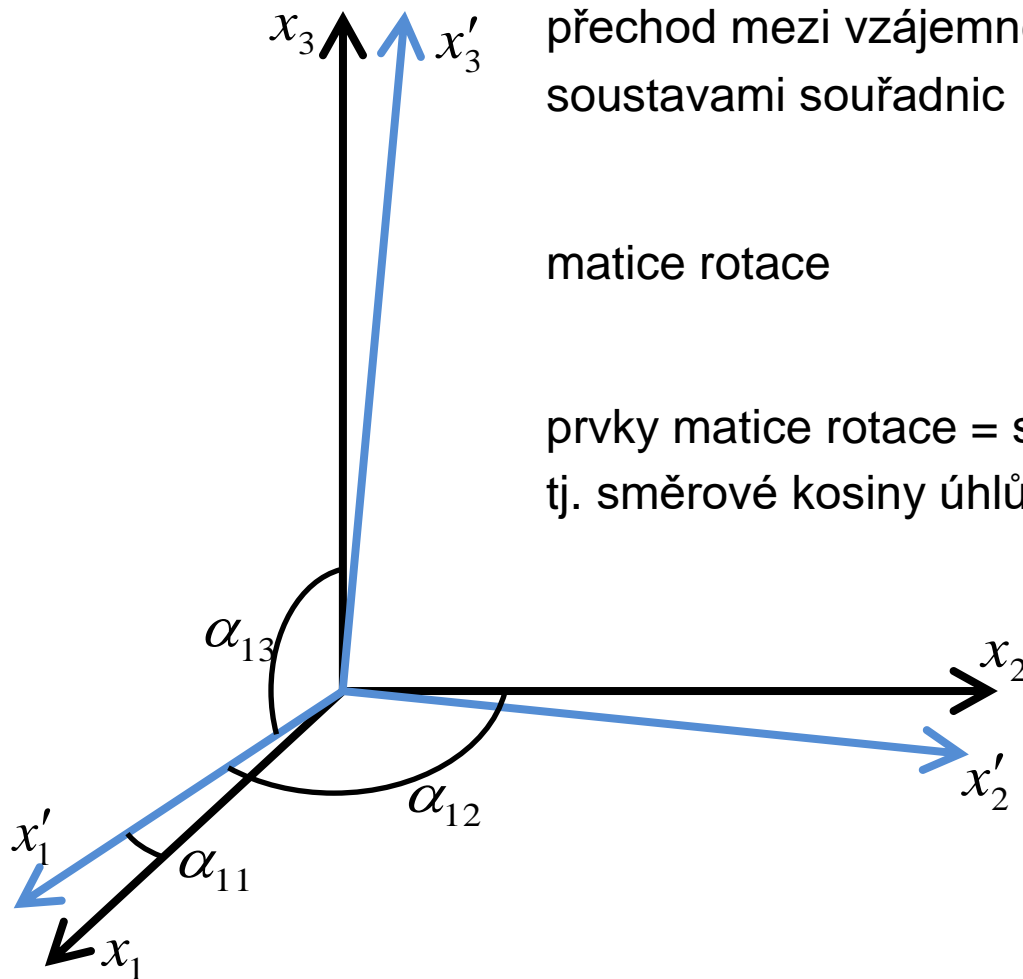
$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \cos \beta$$

$$z = r \cos \gamma$$

často pohodlnější indexované souřadnice a úhly: $x_i = r \cos \alpha_i$

Směrové kosiny transformace



přechod mezi vzájemně pootočenými kartézskými soustavami souřadnic $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x'_1, x'_2, x'_3$

matice rotace

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

prvky matice rotace = směrové kosiny transformace, tj. směrové kosiny úhlů, které svírají osy x'_i s osami x_j

$$a_{ij} = \cos \alpha_{ij}$$

Obecná transformace souřadnic

Rotace a translace

přechod mezi kartézskými soustavami souřadnic

matice rotace

rotace (přímá)

sčítací konvence – přes index, který se vyskytuje v součinu právě dvakrát, se sčítá od 1 do 3

translace určena konstantami c'_i

obecná transformace zahrnuje rotaci a translaci:

transformace (přímá)

transformace inverzní

Poznámky:

- v přímé transformaci se sčítá přes druhý index a_{ij} , v inverzní přes první index!
- pro prvky matice platí **podmínky ortonormality**: $a_{ki}a_{kj} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$ (celkem 9 rovnic)

- Kroneckerův symbol

$$i = j \rightarrow \delta_{ij} = 1$$

$$i \neq j \rightarrow \delta_{ij} = 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \rightarrow x'_1, x'_2, x'_3$$

$$a_{ij} = \cos \alpha_{ij}$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$x'_i = a_{ij} x_j$$

$$x'_i = x_i + c'_i$$

$$x'_i = a_{ij} x_j + c'_i$$

$$x_j = a_{ij} x'_i + c_j, \quad \text{kde } c_j = -a_{ij} c'_i$$

Sčítací konvence a Kroneckerův symbol

Bez sčítací konvence a Kroneckerova symbolu by se podmínky ortonormality

$$a_{ki}a_{kj} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$$

musely zapsat následujícími rovnicemi:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} &= a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} = 1 & (i=1, j=1) \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 & (i=1, j=2) \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0 & (i=1, j=3) \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} &= a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} = 0 & (i=2, j=1) \\ a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} &= a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{23} = 1 & (i=2, j=2) \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 & (i=2, j=3) \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} &= a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 & (i=3, j=1) \\ a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} &= a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0 & (i=3, j=2) \\ a_{13}a_{13} + a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} &= a_{31}a_{31} + a_{32}a_{32} + a_{33}a_{33} = 1 & (i=3, j=3) \end{aligned}$$

Vektorové charakteristiky pohybu

vektorový prostor

- definovány operace 1) sčítání
 2) násobení číslem
- výsledek musí patřit do téhož prostoru
- objekty různých typů – vektory, funkce

vektor, vektorová fyzikální veličina

- velikost
- směr
- orientace

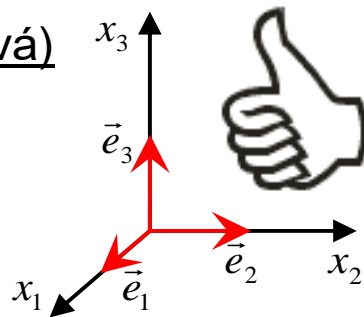
umístěný vektor

- rozšíření matematické definice
- jednoznačně umístěn v prostoru – zpravidla volbou počátečního bodu

Souřadnice vektoru

kartézská soustava souřadnic

- jednotkové směrové vektory ve směrech os $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
- souřadnicové osy vzájemně kolmé – vektory \vec{e}_i ortonormální, tj. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
- ortonormální báze (pravotočivá)



vektory

- umístěné \rightarrow souřadnice vektoru $A_i = x_i^{\text{konec}} - x_i^{\text{počátek}}$
- vektory $A_1\vec{e}_1, A_2\vec{e}_2, A_3\vec{e}_3$ označujeme složky vektoru
- vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ – lineární kombinace směrových vektorů

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 = A_i\vec{e}_i$$

- nositelem fyzikální jednotky vektoru je souřadnice

Operace s vektory – vlastnosti báze

- vektorové veličiny $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$
- souřadnice vektorů v kartézské soustavě souřadnic A_i, B_i, C_i
- skalární součin vektorů ortonormální báze $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
- Kroneckerův symbol

(Leopold Kronecker 1823-1891 Německo)

$$\begin{aligned} i = j &\rightarrow \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j &\rightarrow \delta_{ij} = 0 \end{aligned}$$

- vektorový součin vektorů báze $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$
(platí stejně v pravotočivé i levotočivé soustavě, orientace součinu se určí podle pravidla patřičné ruky)

- Levi-Civitův symbol

$$\begin{aligned} \text{sudá permutace} &\rightarrow \varepsilon_{ijk} = +1 \\ \text{lichá permutace} &\rightarrow \varepsilon_{ijk} = -1 \\ (i = j) \vee (i = k) \vee (j = k) &\rightarrow \varepsilon_{ijk} = 0 \end{aligned}$$

(Tullio Levi-Civita 1873-1941 Itálie)

Operace s vektory – sčítání a násobení

- operandy
- sčítání
- násobení skalárem
- násobení vektorů

$$\vec{A} = A_i \vec{e}_i, \quad \vec{B} = B_j \vec{e}_j$$

$$\vec{A} + \vec{B} = A_i \vec{e}_i + B_j \vec{e}_j = (A_i + B_i) \vec{e}_i$$

$$k\vec{A} = k(A_i \vec{e}_i) = (kA_i) \vec{e}_i$$

- skalární součin

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \vec{e}_i \cdot B_j \vec{e}_j = A_i B_j \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}_{\delta_{ij}} = A_i B_i =$$

$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

- vektorový součin

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_i \vec{e}_i \times B_j \vec{e}_j = AB_j \underbrace{(\vec{e}_i \times \vec{e}_j)}_{\varepsilon_{ijk} \vec{e}_k} = \varepsilon_{ijk} A_i B_j \vec{e}_k =$$

$$(A_2 B_3 - A_3 B_2) \vec{e}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \vec{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{e}_3$$

Transformace vektoru

přechod mezi kartézskými soustavami souřadnic

$$x_1, x_2, x_3 \rightarrow x'_1, x'_2, x'_3$$

souřadnice vektoru

$$A_1, A_2, A_3 \rightarrow A'_1, A'_2, A'_3$$

souřadnice se při pouhé translaci nemění \Rightarrow uvažujeme jen rotace

matice rotace

$$a_{ij} = \cos \alpha_{ij}$$

transformace přímá

$$A'_i = a_{ij} A_j$$

transformace inverzní

$$A_j = a_{ij} A'_i$$

Vektory musí při transformaci zachovat velikost $A'_i A'_i = a_{ij} A_j a_{ik} A_k = a_{ij} \underbrace{a_{ik}}_{\delta_{jk}} A_j A_k = A_j A_j$

splněno díky podmínkám ortonormality ($a_{ki} a_{kj} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$)

Poznámky:

- v přímé transformaci se sčítá přes druhý index a_{ij} , v inverzní přes první index
- slang: vektory různých veličin znázorňujeme do „stejně“ kartézské s.s. \rightarrow společné směrové vektory, osy vždy „cejchovány“ v příslušných jednotkách

Polohový vektor

- kartézská soustava souřadnic, osy jsou „cejchované“ v délkových jednotkách
- souřadnice bodu P v prostoru x_1, x_2, x_3
- spojnice počátku O vztažné soustavy s bodem $P \rightarrow$ „vektor pevně umístěný v počátku“
$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_i\vec{e}_i$$
- polohový vektor (radius vektor) $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ užíváme pro popis souřadnic bodu v prostoru
- povšimněme si:
 - při posunutí počátku vztažné soustavy samozřejmě očekáváme změnu polohových vektorů všech objektů
 - právě jsme si řekli, že vektory se při translaci nemění \Rightarrow polohový vektor není běžný vektor
 - jako vektor se chová až rozdíl polohových vektorů

Parametrizace vektorů

Parametrizace polohy

$$t \rightarrow x_1(t), x_2(t), x_3(t)$$

parametrizace časem

(vhodná pro zkoumání rychlosti)

$$\vec{r}(t) = x_i(t)\vec{e}_i$$

$$s \rightarrow x_1(s), x_2(s), x_3(s)$$

parametrizace dráhou

(vhodná např. pro zkoumání tvaru trajektorie)

$$\vec{r}(s) = x_i(s)\vec{e}_i$$

Vyloučení parametru

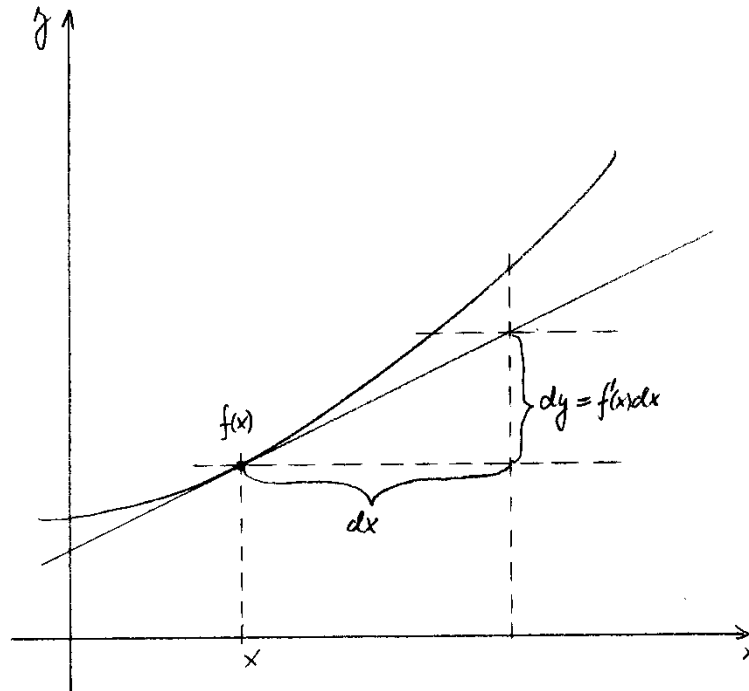
získáme rovnici dráhy (trajektorie)

$$x_1 = x_1(t) \rightarrow t = t(x_1) \rightarrow x_1, x_2(x_1), x_3(x_1)$$

Diferenciál funkce

Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x je $dy \equiv df(x) = f'(x)dx$, kde dx je (infinitezimální) přírůstek nezávisle proměnné; analogicky ho nazýváme diferencíalem nezávisle proměnné.

Symbol pro označení derivace vychází z toho, že derivace skutečně je podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné ($dx \neq 0$)



Vektorová veličina analogická k $s(t)$

dráha $s \rightarrow$ polohový vektor $\vec{r}(t) = x_i(t)\vec{e}_i$

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

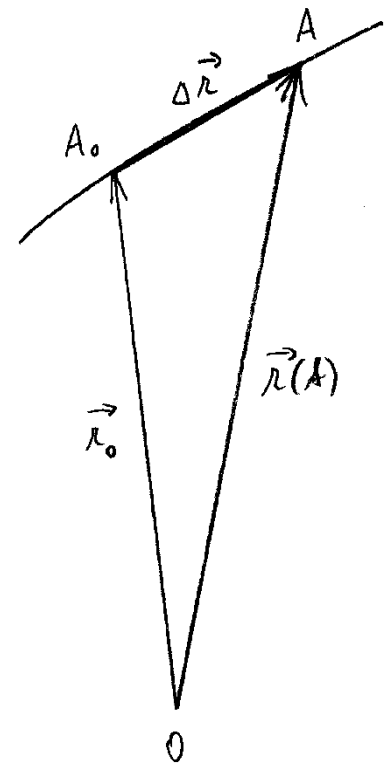
Alternativní postup:

Dráhu s chápeme jako vzdálenost mezi body A_0 a A .

Pak analogickou vektorovou veličinu představuje změna polohového vektoru $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$.

Výhoda:

Změna polohového vektoru má všechny vlastnosti vektoru.



Vektorové veličiny analogické k $v(t)$ a $a(t)$

rychlost $v \rightarrow$ (vektorová) rychlost $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}_i(t)\vec{e}_i$
ve významu „velocity“

$$(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt}$$

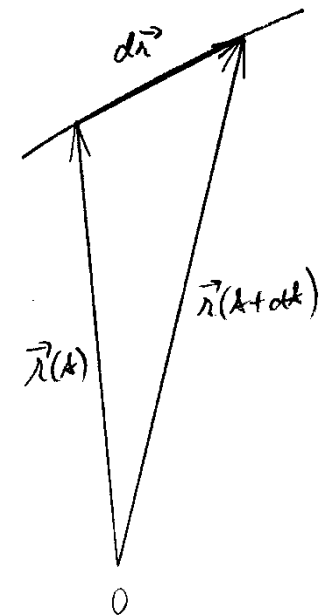
Platí $d\vec{r} = \vec{v}dt$ a naopak neplatí $d\vec{r} \parallel \vec{r}!$
 $d\vec{r} \parallel \vec{v}$

Alternativní postup: Zároveň platí $\vec{v}(t) = \dot{\Delta\vec{r}}(t)$, protože

$$\dot{\Delta\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) = \frac{d}{dt}(x_i(t)\vec{e}_i - \vec{r}_0) = \dot{x}_i(t)\vec{e}_i = \dot{\vec{r}}(t)$$

zrychlení $a \rightarrow$ (vektorové) zrychlení $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}_i(t)\vec{e}_i$

$$(\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))$$



Pravidla pro derivace

derivace složené funkce $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

derivace součinu funkcí (Leibniz) $(fg)' = f'g + fg'$

analogicky pro diferenciály $d(fg) = g df + f dg$

Vztah vektorové a skalární rychlosti

Uvažujeme $\vec{r}(s) = x_i(s)\vec{e}_i$ a $s = s(t)$, tedy jako složenou funkci $\vec{r}(s(t)) = x_i(s(t))\vec{e}_i$

Rychlost vyjádříme

$$\vec{v}(s(t)) = \frac{d}{dt} \vec{r}(s(t)) = \frac{d}{dt} (x_i(s(t)) \vec{e}_i) = \vec{e}_i \frac{d}{dt} (x_i(s(t))) = \vec{e}_i \underbrace{\frac{d}{ds} (x_i(s))}_{\frac{d\vec{r}}{ds}} \cdot \frac{ds(t)}{dt}$$

tedy $\vec{v}(s(t)) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds(t)}{dt}$, kde

- $\frac{ds(t)}{dt} = v(t)$... velikost rychlosti
- $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \vec{\tau}$... tečný vektor trajektorie
 - jednotkový vektor $|\vec{\tau}| = 1$
 - $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \Rightarrow d\vec{r} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{\tau} \parallel \vec{v}$

Závěr: $\vec{v}(t) = \vec{\tau} \cdot v(t)$

Vlastnosti vektoru $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$

$$|\vec{\tau}|=1 \Rightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$$

derivace konstanty $\frac{d}{ds}(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 0$

derivace součinu funkcí $\frac{d}{ds}(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right) = 2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0, \text{ resp. } \vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = 0$$

Splněno ve dvou případech:

1) $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \rightarrow \vec{\tau} = \text{konst}$ (přímočarý pohyb)

2) $\left. \begin{array}{l} \frac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau} \\ d\vec{\tau} \perp \vec{\tau} \end{array} \right\} \rightarrow \text{vektor } \frac{d\vec{\tau}}{ds}, \text{ resp. } d\vec{\tau} \text{ kolmý ke směru rychlosti}$

(obecný křivočarý pohyb)

Křivočarý pohyb v rovině

Ukážeme, že vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ směřuje do středu okamžitého oblouku a velikost tohoto vektoru je svázána s poloměrem okamžitého oblouku.

Rovina pohybu určena vektory $\vec{\tau}(t), \vec{\tau}(t+dt), d\vec{\tau}$. Ukázali jsme, že $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$.

Zavedeme vektor $\vec{n} \equiv \frac{d\vec{\tau}}{|d\vec{\tau}|}$. Musí platit $|\vec{n}|=1$.

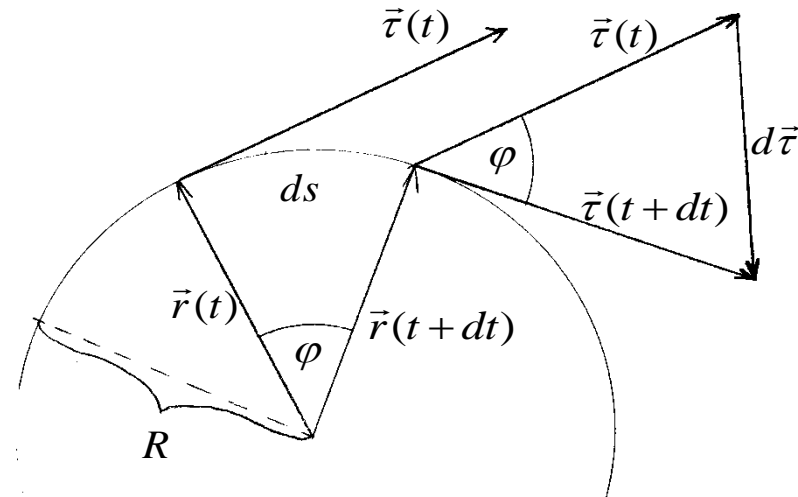
Platí: $\vec{n} \parallel d\vec{\tau}$
 $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ Vektor \vec{n} leží v rovině pohybu.

V obrázku vidíme podobné trojúhelníky,

proto $\frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{|\vec{\tau}|}{R}$. Pak $|\vec{\tau}|=1 \rightarrow \frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{1}{R}$

Vynásobíme obě strany vektorem \vec{n} a

dostaneme $\frac{\vec{n}|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$.



Křivost trajektorie

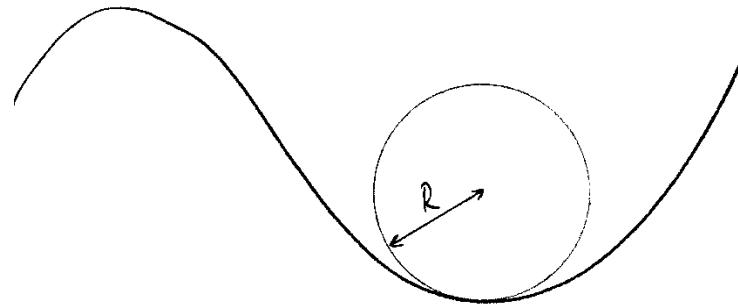
Pro křivočarý pohyb v rovině jsme odvodili $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$.

Vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ tedy je kolmý k okamžité rychlosti a má velikost $\frac{1}{R}$, kde R je poloměr okamžitého oblouku (oskulační kružnice).

Veličina $\kappa = \frac{1}{R}$ se nazývá křivost křivky (v daném bodě).

V rovině mají konstantní křivost

- přímka ($\kappa = 0$)
- kružnice ($\kappa = \frac{1}{r}$)



V případě prostorového pohybu lze každým bodem trajektorie proložit rovinu okamžitého pohybu, takže v každém okamžiku lze obecný křivočarý pohyb popsat jako pohyb v rovině (která se s časem mění).

Vztah vektorového a skalárního zrychlení

Uvažujme obecný nerovnoměrný křivočarý pohyb: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$

Zavedme parametrizaci $\vec{\tau}(s(t))$, pak $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} v$

Celkové zrychlení lze rozdělit na dvě složky: $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \vec{\tau}}_{\vec{a}_t} + v^2 \underbrace{\frac{\vec{n}}{R}}_{\vec{a}_n}$

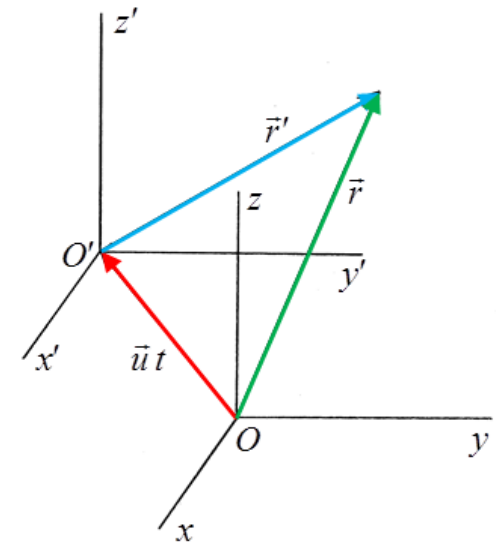
$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$... tečná složka zrychlení – ve směru tečného vektoru

$\vec{a}_n = v^2 \frac{\vec{n}}{R}$... normálová složka – ve směru normálového vektoru, který

směřuje do středu okamžitého oblouku dráhy poloměru R (oskulační kružnice; její střed i poloměr R se v případě obecného křivočarého pohybu můžou neustále měnit)

Axiom skládání rychlostí

- klasický axiom předpokládá lineární skládání rychlostí nezávisle na pohybu těles
- vychází z pozorování Galileiho a Newtona
- byl jedním z východisek pro postulování absolutního prostoru a času
- axiom je v souladu s dříve zavedenými transformačními vztahy:
- vztažná soustava O' se pohybuje rychlostí \vec{u} vzhledem k soustavě O
- vzhledem k O rychlost pohybu tělesa \vec{v}
- vzhledem k O' rychlost pohybu tělesa \vec{v}'
- dosazením (tzv. **Galileiho transformace**)
- vztah mezi rychlostmi (derivováním)



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

$$\vec{r}' = \vec{r}'_0 + \vec{v}'t$$

$$\vec{r}_0 + \vec{v}t = \vec{r}'_0 + \vec{v}'t + \vec{u}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

Příklady pohybů v prostoru

obecný křivočarý pohyb v prostoru

- 3 parametrické rovnice

rovinný pohyb v prostoru

- 2 parametrické rovnice
- (při vhodné volbě soustavy souřadnic)

přímočarý pohyb v prostoru

- 1 parametrická rovnice
- (při vhodné volbě soustavy souřadnic)

Rovnoměrný kruhový pohyb

$$x_1 = R \cos(\omega t + \alpha) + x_{10}$$

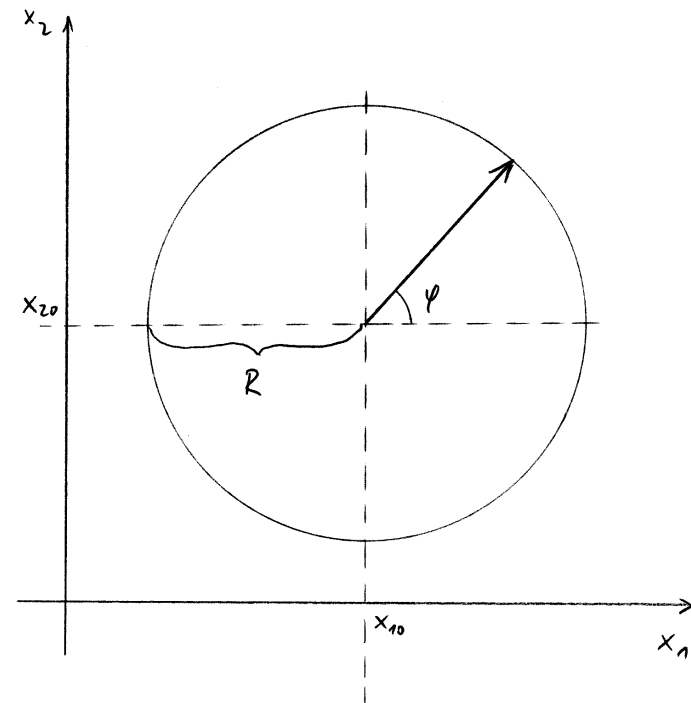
$$x_2 = R \sin(\omega t + \alpha) + x_{20}$$

R ... poloměr dráhy
 α ... počáteční fáze
 x_{10}, x_{20} ... souřadnice středu

$f = \frac{1}{T}$... frekvence a oběžná doba
(perioda)

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$... úhlová (kruhová) frekvence

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f = \frac{\omega}{2\pi}$... další vztahy



Rovnoměrný kruhový pohyb

rovnice trajektorie (vyloučení času):

$$x_1 - x_{10} = R \cos(\omega t + \alpha)$$

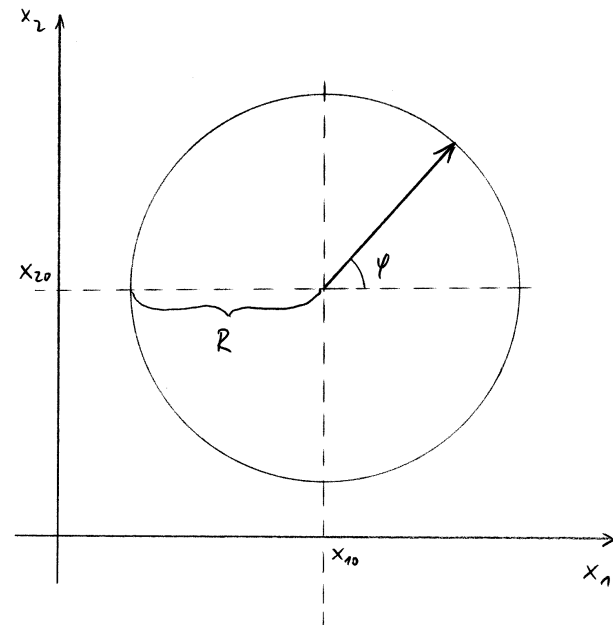
$$x_2 - x_{20} = R \sin(\omega t + \alpha)$$

$$(x_1 - x_{10})^2 = R^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

$$(x_2 - x_{20})^2 = R^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 = R^2 \underbrace{(\cos^2(\omega t + \alpha) + \sin^2(\omega t + \alpha))}_1$$

$$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 = R^2$$



Rovnoměrný kruhový pohyb

rychlost:

$$\left. \begin{aligned} v_1 = \dot{x}_1 &= -R\omega \sin(\omega t + \alpha) \\ v_2 = \dot{x}_2 &= R\omega \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = R\omega \underbrace{\sqrt{\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha)}}_1$$

$$|v| = R\omega$$

vektor ve směru pohybu \Rightarrow obvodová rychlost

zrychlení:

$$\left. \begin{aligned} a_1 = \ddot{x}_1 &= -R\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \\ a_2 = \ddot{x}_2 &= -R\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = R\omega^2 \underbrace{\sqrt{\cos^2(\omega t + \alpha) + \sin^2(\omega t + \alpha)}}_1$$

$$|a| = R\omega^2 = |v| \omega = \frac{|v|^2}{R}$$

vektor míří do středu otáčení \Rightarrow dostředivé zrychlení

Nerovnoměrný kruhový pohyb

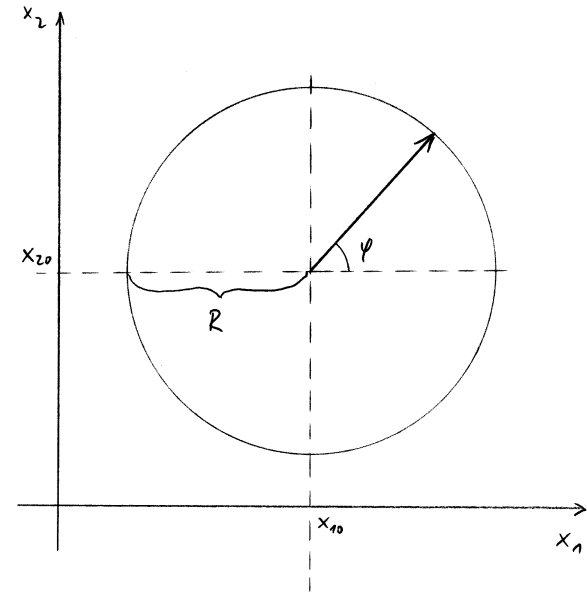
$$x_1 = R \cos \varphi(t) + x_{10}$$

$$x_2 = R \sin \varphi(t) + x_{20}$$

R ... poloměr dráhy

$\varphi(t)$... časově proměnný fázový úhel

x_{10}, x_{20} ... souřadnice středu



Harmonický pohyb

průmět rotačního pohybu do 1D

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) + x_0$$

A	...	amplituda
ω	...	kruhová (úhlová) frekvence
α	...	počáteční fáze
x_0	...	výchozí poloha
$T = \frac{2\pi}{\omega}$...	perioda (oběžná doba)
$f = \frac{1}{T}$...	frekvence
$f = \frac{\omega}{2\pi}$...	frekvence

rychlost a zrychlení:

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 \underbrace{A \sin(\omega t + \alpha)}_{x - x_0} = -\omega^2 (x - x_0) \quad \dots \quad \text{zrychlení úměrné výchylce}$$

Zavedení „úhlových“ vektorů

průvodič \vec{R} leží v rovině rotace hmotného bodu a míří ze středu rotace k h.b.

$$2D: \vec{R} = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$$

3D: výhodnější uvažovat polohu h.b. vzhledem k pevnému bodu na ose otáčení

- polohové vektory jednotlivých h.b. opisují kužele se společným vrcholem
- průvodič jednotlivého h.b. je průmět polohového vektoru do roviny rotace h.b.

úhlové otočení $\Delta\varphi$ = úhel, který svírají dva různé průvodiče pohybujícího se bodu

úhlová dráha φ = úhel, který svírají aktuální průvodič a jeho výchozí poloha

vektor (úhlového) otočení $\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{o}$, kde \vec{o} je jednotkový vektor ve směru osy otáčení; orientace závisí na točivosti použité báze – pokud bod rotuje v kladném smyslu ve vodorovné rovině, bude v pravotočivé soustavě vektor \vec{o} směřovat vzhůru (pravidlo pravé ruky)

Vektory úhlové rychlosti a úhlového zrychlení

vektor úhlové rychlosti

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{o} = \omega \cdot \vec{o}$$

vektor úhlového zrychlení

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \vec{o} = \varepsilon \cdot \vec{o}$$

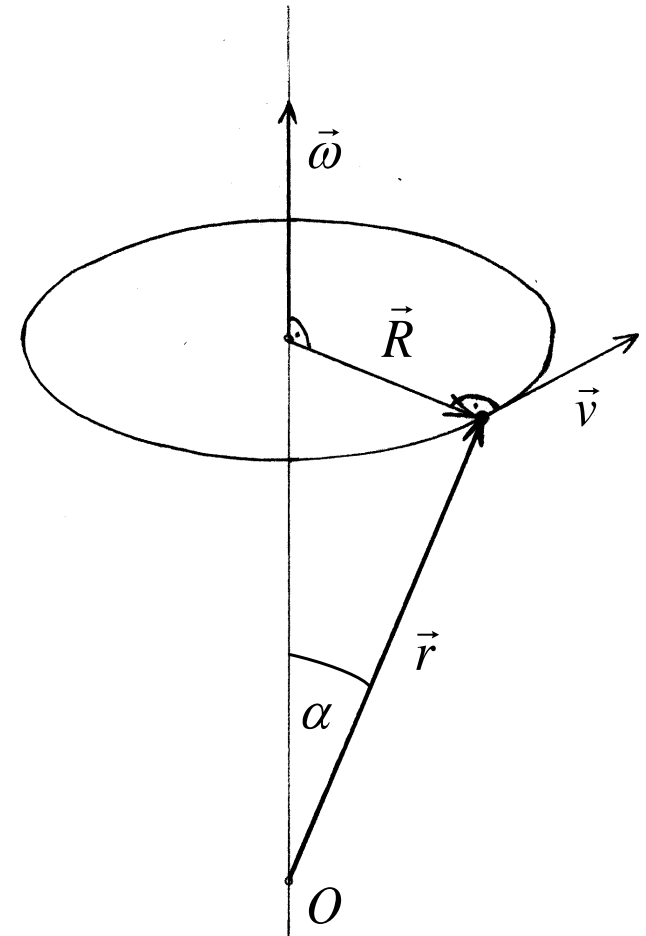
víme: $s = R\varphi \rightarrow ds = R d\varphi \rightarrow \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow$

$$v = R\omega \rightarrow |\vec{v}| = |\vec{R}| \cdot |\vec{\omega}|$$

podle obrázku: $|\vec{R}| = |\vec{r}| \sin \alpha \rightarrow$

$$|\vec{v}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{\omega}| \sin \alpha \rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

(pořadí činitelů v souladu s pravidlem pravé ruky)



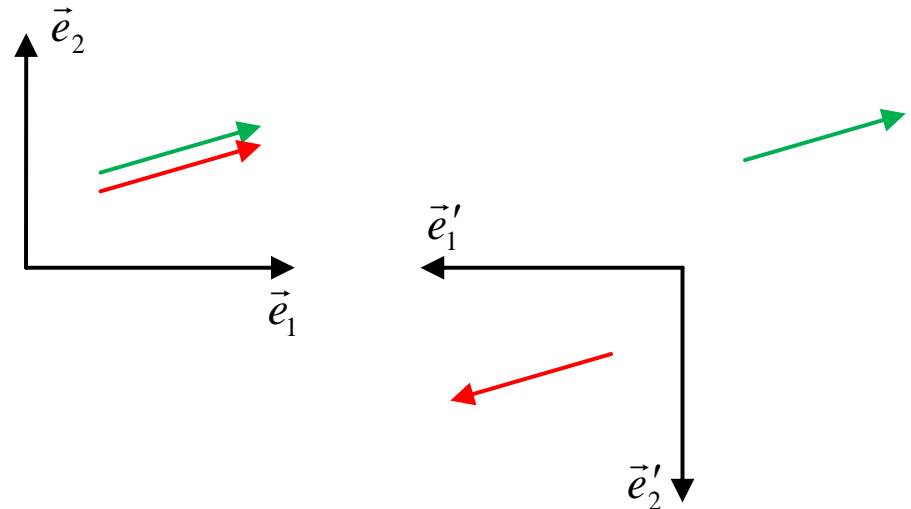
Polární a axiální vektory

- při zrcadlení souřadnic:
- 1) $\vec{e}'_i = -\vec{e}_i$
 - 2) pravotočivá s.s. \rightarrow levotočivá s.s.

polární (pravý) vektor

$$\vec{A} = a_i \vec{e}_i \rightarrow \vec{A}' = \underbrace{-a_i}_{a'_i} \vec{e}'_i \rightarrow \vec{A}' = -\vec{A}$$

- změní znaménko
- **zůstane na místě**
- skutečná fyzikální veličina



vektorový součin 2 polárních vektorů:

axiální vektor (**pseudovektor**)

$$\vec{A}' \times \vec{B}' = (-a_i \vec{e}'_i) \times (-b_j \vec{e}'_j) = (a_i \vec{e}_i) \times (b_j \vec{e}_j) = \vec{A} \times \vec{B}$$

- nemění znaménko
- **zrcadlí se**
- není skutečná fyzikální veličina

Užití vektoru úhlové rychlosti

Rekapitulace vztahů:

$$s = R\varphi$$

$$ds = R d\varphi \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{R}$$

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{R}$$

$$v = R\omega \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{r}| \sin \alpha |\vec{\omega}| \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = |\vec{r}| \sin \alpha |\vec{\omega}| \vec{\tau} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Vypočtěme zrychlení působící na h.b. Derivujeme rychlost:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_n}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad \dots \quad \vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) \parallel (\vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \vec{a}_t \parallel \vec{v} \quad \dots \quad \text{tečná složka zrychlení}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \dots \quad \vec{a}_n \perp \vec{\omega}, \vec{a}_n \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a}_n \parallel \vec{R} \quad \dots \quad \text{normálová složka zrychlení}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \dots \quad \text{normálová složka míří proti průvodiči (dostředivé zrychlení)}$$

Výpočet zrychlení rotačního pohybu

Použití vektorů úhlové rychlosti a úhlového zrychlení spolu s vektorovým násobením vede na kompaktní zápis:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_n}$$

Porovnejme s výsledkem alternativního postupu:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{d}{dt}(R\omega\vec{\tau}) = R \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\varepsilon} \vec{\tau} + R\omega \underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{\frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt}} = R\varepsilon\vec{\tau} + R\omega \underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}_{\vec{n}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{R\omega} = \underbrace{R\varepsilon\vec{\tau}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{R\omega^2\vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

Pro odstranění proměnné R (délka průvodiče) poslouží vztahy

$$\vec{a}_t = R\varepsilon\vec{\tau} = \underbrace{|\vec{r}| \sin \alpha}_{|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}|} |\vec{\varepsilon}| |\vec{\tau}|$$

$$\vec{a}_n = R\omega^2\vec{n} = \underbrace{|\vec{r}| \sin \alpha}_{|\vec{\omega} \times \vec{r}|} \underbrace{|\vec{\omega}| \cdot |\vec{\omega}| \sin \frac{\pi}{2}}_{|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})|} |\vec{\omega}| |\vec{n}|$$