MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA A

LUBOŠ PICK

Příklad A1. Vyšetřete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(3^n+1)}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

(10 bodů)

Příklad A2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}\, dx$$

na všech intervalech, na kterých existuje. **(10 bodů)**

Příklad A3. Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{\alpha} \operatorname{arccotg} x}{x}\, dx$$

v závislosti na hodnotě parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. **(10 bodů)**

Příklad A4. Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y) = \begin{cases} (e^{x^2-y^2}, y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)) & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ (0,0) & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

(a) Dokažte, že v bodě $[1,1]$ existuje derivace F, spočtěte její representující matici a určete jakobián F v bodě $[1,1]$.

(b) Spočtěte $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)$, pokud existuje. **(10 bodů)**

Příklad A5. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojtá funkce. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku nebo protipříkladem na jeho platnost.

(a) Jestliže f je lichá, potom je každá její primitivní funkce sudá.

(b) Jestliže f je sudá, potom je každá její primitivní funkce lichá.

(c) Jestliže f je lichá, potom je $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$. **(10 bodů)**

$\boxed{A1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(3^n+1)} =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Řešení: Je-li $x \in (-3,3)$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{3^n+1}} = \frac{|x|}{3} < 1,$$

takže řada AK dle Cauchyova kritéria.

Je-li $x \in (3,\infty)$ potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

není tedy splněna nutná podmínka konvergence a řada D.

Je-li $x \in (-\infty,-3)$, potom

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, neboť

$$\lim a_{2n} = \infty \quad \text{a} \quad \lim a_{2n+1} = -\infty,$$

není tedy splněna nutná podmínka konvergence a řada D.

Je-li $x=3$, označme $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, potom

$$\sum b_n \, D \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = 1,$$

takže dle LSK řada D (obě mají kladné členy).

Je-li $x=-3$, potom $a_n = (-1)^n \dfrac{3^n}{n(3^n+1)}$.

Položme $f(x)=\dfrac{3^x}{x(3^x+1)}$ pro $x\in(0,\infty)$, potom

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\frac{3^x}{3^x+1}+\frac{1}{x}\,\frac{3^x\log 3}{(3^x+1)^2} = \frac{3^x}{x(3^x+1)}\left(\frac{\log 3}{3^x+1}-\frac{1}{x}\right).$$

Výraz $\left(\dfrac{\log 3}{3^x+1}-\dfrac{1}{x}\right)$ je záporný pro každé $x\geq 1$,

neboť pro $g(x)=\dfrac{3^x+1}{\log 3}-x$ je $g(0)>0$ a

$g'(x)=3^x-1>0$. Tedy $f'(x)<0$ pro $x\in(0,\infty)$.

Odtud plyne, že posloupnost $\left\{\dfrac{3^n}{n(3^n+1)}\right\}$

je klesající. Protože navíc $\lim \dfrac{3^n}{n(3^n+1)}=0$,

řada K dle Leibnizova kritéria.

Závěr:
$$\sum a_n \begin{cases} K & \Longleftrightarrow\ x\in[-3,3) \\ AK & \Longleftrightarrow\ x\in(-3,3). \end{cases}$$

Hodnocení:

$$\left.\begin{array}{l} x\in(-3,3) \\ x\in(3,\infty) \\ x\in(-\infty,-3) \end{array}\right\}\ 3$$

$x=3$ .. 2

$x=-3$ .. 4

závěr .. 1

$\boxed{A2}$ $$\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}\,dx$$

Řešení. pro $k \in \mathbb{Z}$ def.

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} t + k\pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

potom $\varphi((-\infty,\infty)) = \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) =: I_k$,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad (\text{tedy } \forall t \in \mathbb{R} \ \exists \text{ vl. a nenulová}),$$

$$\varphi^{-1}(x) = \operatorname{tg}(x-k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

Označ $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{Z}$.

Potom $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

pro $x \in I_k$, a tedy

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{1+2\operatorname{tg}^2 x}, \quad x \in I_k,$$

takže $f(\varphi(t)) = \dfrac{1}{1+2t^2}$. Jest

$$\int (f\circ\varphi)(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int \frac{1}{(1+2t^2)(1+t^2)}\,dt.$$

Položme
$$\frac{1}{(1+2t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+2t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2},$$
pak
$$1 = (At+B)(1+t^2) + (Ct+D)(1+2t^2),$$
takže

„t^3" $\quad A + 2C = 0$

„t^2" $\quad B + 2D = 0$

„t" $\quad A + C = 0$

„1" $\quad B + D = 1$.

Odtud plyne $A = C = 0$, $B = 2$, $D = -1$. Tedy
$$\int (f\circ\varphi)(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int \frac{2}{1+2t^2}\,dt - \int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$\stackrel{c}{=} \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,t) - \mathrm{arctg}\,t, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Dle VOS2 tedy platí
$$\int f(x)\,dx \stackrel{c}{=} \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\cdot \mathrm{tg}\,(x-k\pi)) - (x-k\pi)$$
$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) - x + k\pi, \quad x \in I_k.$$

Definujme $F_k : I_k \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F_k(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) - x + k\pi .$$

Potom

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+k\pi+} F_k(x) = -\sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - k\pi + k\pi = \frac{\pi}{2}(1-\sqrt{2}),$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi-} F_k(x) = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - k\pi + k\pi = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Položme $F_0(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) - x + k\pi + k\pi(\sqrt{2}-1)$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) - x + \sqrt{2}\,k\pi, \quad x \in I_k ,$$

a navíc $F_0(x) = (\sqrt{2}-1)(k\pi + \frac{\pi}{2})$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Potom $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}\,dx \stackrel{c}{=} F_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Hodnocení:

VOS	.. 1
rozklad na parc. zlomky	.. 1
integrace zlomků	.. 2
lepení	.. 4

$\boxed{A3}$ $$\int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^\alpha \operatorname{arccotg} x}{x}\,dx$$

<u>Řešení</u>: Polož $g(x) = (x-1)^{\frac{\alpha}{2}}$, $x \in (1,2]$.

Potom f, g jsou spojité a nezáporné na $(1,2]$ a platí

$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^\alpha \operatorname{arccotg} x}{x} = 2^{\frac{\alpha}{2}-2}\pi,$$

takže $\int_1^2 f \; K \iff \int_1^2 g \; K$

$\iff \frac{\alpha}{2} > -1 \iff \alpha > -2$.

Polož $h(x) = x^{\alpha-2}$, $x \in [2,\infty)$, potom f, h jsou nezáporné a spojité na $[2,\infty)$ a platí $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^\alpha x \cdot \operatorname{arccotg} x = 1,$$

neboť $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1$ a

$$\lim_{x\to\infty} x . \operatorname{arccotg} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{L'H\,\%}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 ,$$

takže $\int_2^\infty f \;K \iff \int_2^\infty h \;K \iff \alpha - 2 < -1$

$$\iff \alpha < 1 .$$

Protože f je spojitá v bodě $x=2$,

je $\int_1^\infty f \;K \iff \int_1^2 f \;K \;\&\; \int_2^\infty f \;K.$

Závěr. $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje

právě tehdy, když $\alpha \in (-2, 1)$.

Hodnocení:

konvergence u 1 .. 4

konvergence u ∞ .. 4

závěr .. 2

$\boxed{A4}$ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(e^{x^2-y^2},\ y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right), & [x,y] \neq o \\ (0,0), & [x,y] = o. \end{cases}$$

(a) $F'(1,1)$, matici $J_F(-1,1)$

(b) $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)$.

Řešení. (a) Pro $[x,y] \neq o$ platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x e^{x^2-y^2}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -2y e^{x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = y^2 \frac{1}{1+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-2xy^2}{1+(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{1+\frac{1}{x^2+y^2}} \cdot \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 2y \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^3}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

Protože jsou všechny parciální derivace každé složky F spojité funkce na okolí $[1,1]$, existuje $F'(1,1)$ a je representována maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -\frac{2}{5} & 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$J_F = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{8}{5}.$$

(b) $$\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{F_2(0,t) - F_2(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{t^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} t \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{t^2} = 0.$$

<u>Hodnocení</u>

(a) parciální derivace F v $[1,1]$ .. 2

existence $F'(1,1)$ .. 2

representace $F'(1,1)$ .. 2

jacobián $J_F(1,1)$ .. 1

(b) $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)$ .. 3

$\boxed{A5}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá

(a) f lichá $\Rightarrow$ $\nexists$ primfce sudá

(b) f sudá $\Rightarrow$ $\nexists$ primfce lichá

(c) f lichá $\Rightarrow$ $\int_{-1}^{1} f = 0$.

<u>Řešení:</u> (a) PLATÍ, důkaz:

polož $F(x) = \int_0^x f$, $x \in \mathbb{R}$

protože f je spojitá, je $f \in \mathcal{R}([a,b])$ $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$,

a tedy je F primfce k f na $\mathbb{R}$. Zvolme

prim. fci G k f na $\mathbb{R}$. Potom $\exists K \in \mathbb{R}$

tak, že $G = F + K$ na $\mathbb{R}$. Zvolme $x \in \mathbb{R}$.

Potom $-x \in \mathcal{D}(G)$ a platí

$$G(-x) = F(-x) + K = K + \int_0^{-x} f(t)\,dt$$

substituce: $s = -t$, $ds = -dt$, $\begin{array}{c|c|c} t & 0 & -x \\ \hline s & 0 & x \end{array}$

$$= K - \int_0^x f(-s)\,ds$$

$$\overset{(f \text{ lichá})}{=} K + \int_0^x f(s)\,ds = K + F(x) = G(x),$$

takže G je sudá.

(b) NEPLATÍ, důkaz:

Zvolme prim. fci F k f. Nalezneme

$K \in \mathbb{R}$ tak, aby $F(0)+K \neq 0$. Položme

$G = F+K$ na $\mathbb{R}$. Potom G je prim. fce k f

na $\mathbb{R}$ a $G(0) \neq 0$, takže G není lichá.

(c) PLATÍ, důkaz:

z (a) plyne, že $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = 0$.

Hodnocení:

(a) ... 5

(b) ... 3

(c) - 2