Definice: Nechť D je množina přípustných dat a U úloha definovaná pro vstupy z D. Řekneme, že U je *korektní ve smyslu Hadamarda*, pokud pro každé $d \in D$ existuje právě jedno řešení $U(d)$ a U je v jistém smyslu spojité na D. Pokud úloha není korektní, říkáme, že je *ill-posed*.

Definice: O úloze U na množině dat D řekneme, že je *dobře podmíněná*, pokud pro libovolné $d \in D$, $d+\Delta d \in D$, $\frac{||\Delta d||}{||d||} << 1$, platí $\frac{||U(d+\Delta d)-U(d)||}{||U(d)||} << 1$. V opačném případě je úloha *špatně podmíněná*.

Definice: Nechť D je množina dat a f je výpočetní schéma dané úlohy. Řekneme, že algoritmus f je *zpětně stabilní*, pokud pro libovolné $d \in D$ existuje $\Delta d \in D$ takové, že $\frac{||\Delta d||}{||d||} << 1$ a $f(d+\Delta d) = \mathrm{FPA}(f(d))$.

Věta: Nechť L, U jsou FPA výsledky Gaussovy eliminace matice A řádu n. Pak existuje ΔA řádu n taková, že $A + \Delta A = LU$ a

$$||\Delta A||_\infty \leq 2n\epsilon_{mach}||L||_\infty||U||_\infty + \mathcal{O}(\epsilon_{mach}^2).$$

Věta: LU rozklad s pivotací je *podmínečně zpětně stabilní*, tj. pokud je vstupní matice A řádu n a vypočtené faktory L,U, pak je algoritmus zpětně stabilní pro malý *růstový faktor* $\frac{||U||_\infty}{||A||_\infty}$.

Věta (Schurova pro reálný rozklad): Nechť A je matice řádu n. Pak existuje U ortogonální taková, že U^TAU je *kvazihorní*, tj. je horní trojúhelníková po blocích velikosti 1x1 a 2x2.

Věta (Wilkinson, Turing): Nechť A je komplexní matice a U je elementární Givensova rotace nebo Householderova reflexe. Pak existuje ΔA taková, že $U(A+\Delta A) = \mathrm{FPA}(UA)$ a

$$\frac{||\Delta A||}{||A||} \leq \gamma n^2 \epsilon_{mach} + \mathcal{O}(\epsilon_{mach}^2)$$

pro γ kladnou konstantu.

Věta: Nechť A je řádu n, Q, R jsou spočtené faktory QR rozkladu. Pak platí následující asymptotická chování pro ztrátu ortogonality $E_Q = ||I - Q^*Q||$:

- CGS: $E_Q \sim \kappa^2(A)\epsilon_{mach}$
- MGS: $E_Q \sim \kappa(A)\epsilon_{mach}$
- ICGS, HH, Giv: $E_Q \sim \epsilon_{mach}$

Věta: Nechť A je řádu n a Q, R jsou spočtené faktory QR rozkladu. Pak $\frac{||A-QR||}{||A||} \sim \epsilon_{mach}$.

Definice: Uvažujme *nekompatibilní úlohu* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Metodou nejmenších čtverců* (LSM) rozumíme metodu perturbování $\mathbf{b}$. *Metodou úplných nejmenších čtverců* (TLSM) rozumíme perturbování A i $\mathbf{b}$. *Data Least Squares* (DLS) rozumíme perturbování A. *Škálovanou úplnou metodou nejmenších čtverců* rozumíme třídu metod danou $\gamma \in (0, \infty)$, při níž se perturbuje A i $\mathbf{b}$ a minimalizuje se $||(\gamma\Delta\mathbf{b} \mid \Delta A)||$.

TODO Řešení LSM

Definice: Pro vektor $\mathbf{v}$ a matici A definujeme *Rayleighův podíl* jako

$$\frac{\mathbf{v}^* A\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}.$$

Definice: Pro matici A rozumíme *shiftováním* použití mocninné metody na matice $(A - \rho I)^{-1}$ pro nějaké ρ.

Definice: k-tým *Krylovovým prostorem* matice A a vektoru $\mathbf{v}$ rozumíme prostor

$$\mathcal{K}_k(A, \mathbf{v}) := \mathrm{LO}\{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v}\}.$$

Stupněm vektoru k matici rozumíme nejmenší k_0 takové, že $\mathcal{K}_{k_0} = \mathcal{K}_{k_0+1}$ (tehdy je prostor *A-invariantní*).

Věta: Pro Arnoldiho proces platí

$$AV_k = V_{k+1}H_{k+1,k},$$

případně

$$AV_k = V_k H_k + h_{k+1,k}\mathbf{v_{k+1}}\mathbf{e_{k+1}}^T.$$

TODO Arnoldi a vlastní čísla

Definice: *Jacobiho metodou* rozumíme

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{x_{i-1}} + D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x_{i-1}}).$$

Definice: *Gauss-Seidelovou metodou* rozumíme

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{x_{i-1}} + (D - L)^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x_{i-1}}).$$

Definice: *Successive Overrelaxation (SOR metoda)* je

$$\mathbf{x_i} = (1 - \omega)\mathbf{x_{i-1}} + \omega D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x_{i-1}})$$

pro $\omega \in (0, 2)$ *relaxační parametr.*

Definice: Obecnou *Stacionární iterační metodou* rozumíme pro nějaké štěpení $A = M - N$ a M regulární

$$\mathbf{x_i} = M^{-1}(\mathbf{b} + N\mathbf{x_{i-1}}).$$

$M^{-1}N$ nazýváme *iterační matice.*

Věta (Oldenburgova): Nechť A je komplexní čtvercová matice. Pak

$$\rho(A) < 1 \iff A^n \longrightarrow O.$$

Věta (Geršgorinova): Nechť A je komplexní matice řádu n a

$$D_k = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{kk}| < \sum_{k \neq i=1}^{n} |a_{ki}|\}$$

je *k-tý Geršgorinův kruh.* Pak $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Definice: Řekneme, že A řádu n je *ostře diagonálně dominantní*, pokud pro každé k platí

$$\sum_{k \neq i=1}^{n} |a_{ki}| < |a_{kk}|.$$

Definice: Nechť $(x_i) \longrightarrow x^*$. Řekneme, že posloupnost má *řád konvergence* p, pokud

$$\lim \frac{|x^* - x_{n+1}|}{|x^* - x_n|} \in (0, \infty).$$

Řekneme, že *metoda je řádu p*, pokud všechny posloupnosti dané metody jsou řádu alespoň p a alespoň jedna posloupnost má řád přesně p.

Věta: Nechť $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $x^* \in [a,b]$, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že libovolnou počáteční volbu $x_0 \in B(x^*, \delta)$ posloupnost získaná Newtonowou metodou kvadraticky konverguje k x^*.

TODO Newton 2

Definice: O $\mathbf{d}$ řekneme, že je to *spádový směr f v* $\mathbf{a}$, pokud

$$\exists \delta > 0 \forall \lambda \in (0, \delta) : f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) < f(\mathbf{x}).$$

Metodou spádových směrů obecně rozumíme

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{x_{i-1}} + \alpha_i \mathbf{d_i}$$

pro $\alpha_i > 0$ *délku kroku* a $\mathbf{d_i}$ spádový směr. *Metodou největšího spádu* rozumíme volbu $\mathbf{d_i} = \nabla f(\mathbf{x})$. *Metodou optimálního kroku / line search* rozumíme hledání optimálního α_i v každém kroku.

Definice: *Obecnou metodou hledání minima* rozumíme

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{x_{i-1}} - \alpha_i M_i \nabla f(\mathbf{x_{i-1}}).$$

Pro $M_i = I$ dostáváme metodu největšího spádu, pro $M_i = H_f(\mathbf{x_{i-1}})$ (Hessovu matici) Newtonovu metodu.

Věta: Pro monické Legendreovy polynomy na $[-1,1]$ a kanonický skalární integrální součin (bez váhové funkce) platí rekurence

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_n(x).$$

Definice: *Čebyševovy polynomy* jsou dány vztahem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, zároveň je lze získat ortogonalizací na $[-1,1]$ vzhledem k váhové funkci $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Věta (Cauchy): Nechť $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$, L_n je Lagrangeův interpolační polynom. Pak pro každé $x \in [a,b]$ existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Věta: Nechť f je lipschitzovská na $[a, b]$ a D_n je posloupnost zjemňujících se dělení na $[a, b]$, D_n má jako dělicí body kořeny Čebyševova polynomu řádu n na $[a, b]$. Pak Lagrangeův interpolační polynom L_n konverguje stejnoměrně k f na $[a, b]$ pro $n \to \infty$.

Definice: Nechť f je funkce na $[a, b]$ a $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. *Přirozeným kubickým interpolačním splinem* rozumíme interpolaci pomocí funkce S třídy $\mathcal{C}^2([a, b])$, která je na každém dělicím intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ kubická a $S''(a) = S''(b) = 0$.

Věta: Pro *momenty kubického splinu* $M_i = S'(x_i)$ s dělicím krokem h rovnoměrného dělení platí

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(f(x_{i-1} - 2f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Věta: Nechť $(x_i)_{i=0}^n$ je dělení $[a, b]$, $h = \max\{x_i - x_{i-1}\}$, f je třídy $\mathcal{C}^4([a, b])$ a S je interpolační kubický spline. Pak pro každé $k \in \{0, 1, 2\}$ existuje $c_k \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\max |f^(k)(x) - S^(k)(x)| \leq c_k h^{4-k} \max |f^{(4)}(x)|.$$

Navíc již spojitost f zaručuje konvergenci splinu k f pro zjemňování dělení jdoucí normou k nule.

Definice: *Obdelníkovým pravidlem* rozumíme

$$Q_o(f) = (b - a)f(\frac{a + b}{2}).$$

Definice: *Newton-Cotesovými kvadraturními vzorci* rozumíme kvadratury pomocí Lagrangeových interpolačních polynomů na rovnoměrném dělení $[a, b]$.

- Pro $n = 1$ *lichoběžníkové pravidlo*

$$Q_L(f) = \frac{b - a}{2}(f(a) + f(b))$$

- Pro $n = 2$ *Simpsonovo pravidlo*

$$Q_S(f) = \frac{b - a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a + b}{2}) + f(b))$$

Definice: *Algrebraickým řádem kvadratury* Q rozumíme k takové, že pro libovolný polynom p řádu nejvýše k platí $Q(p) = \int_a^b p(x)dx$.

Věta: Pro dělení $(x_i)_{i=0}^n$ a n liché má Newton-Cotesova metoda řád n, pro n sudé má řád $(n + 1)$.

Věta: Nechť Q je lagrangeovská kvadratura s obecnými uzly $x_0, \dots, x_n$ a $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. Pak

$$|\int_a^b f - Q(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \prod_{i=0}^n |x - x_i| dx.$$

Pro lichoběžníkové pravidlo je

$$|\int_a^b f - Q_L(f)| \leq \frac{1}{12}(b-a)^3 \max |f''(x)|.$$

Pro Simpsonovo pravidlo je

$$|\int_a^b f - Q_S(f)| \leq \frac{1}{196}(b-a)^4 \max |f'''(x)|.$$

TODO Gaussova kvadratura

Definice: *Eulerovou metodou* rozumíme explicitní schéma

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Heunovou metodou rozumíme implicitní schéma

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Definice: *Přírůstkovou funkcí jednokrokové metody* rozumíme funkci Φ (předpokládá se spojitost a lipschitzovskost v y) odpovídající obecnému jednokrokovému schématu

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \Phi(x_n, y_n, h).$$

Definice: Jednokroková metoda je *konzistentní*, pokud

$$lim_{h \to 0_+} \Phi(x, y, h) = f(x, y),$$

a je *konvergentní*, pokud

$$\lim_{h \to 0_+} \max_{0 \leq i \leq n} |y(x_i) - y_i| = 0.$$

Definice: *Globální chybou jednokrokové metody* rozumíme

$$e_n := y(x_n) - y_n.$$

Lokální diskretizační chybou jednokrokové metody rozumíme

$$\tau(x, h) := \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h).$$

Věta: Jednokroková metoda je konzistentní právě tehdy, když pro každé $x \in [a,b]$ je $\lim_{h \to 0_+} \tau(x, h) = 0$.

Definice: Řekneme, že jednokroková metoda je *řádu* p, pokud

$$\exists K > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, b] \forall h \in (0, \delta) : |\tau(x, h)| \leq Kh^p.$$

Věta: Nechť přírůstková funkce jednokrokové metody Φ je L-lipschitzovská vzhledem k y a metoda je řádu p. Pak je

$$\max_{0 \leq i \leq n} |y(x_i) - y_i| \leq \frac{K}{L}(e^{L(b-a)} - 1)h^p.$$

Věta Nechť Φ je lipschitzovská přírůstková funkce v y. Pak je metoda konzistentní právě tehdy, když je konvergentní.

Definice: Obecná *Runge-Kuttova metoda* (*S-stage Method*) je dána přírůstkovou funkcí

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^{S} w_i K_i,$$

kde

$$K_j = f(x + \alpha_j h, y + \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} h K_i)$$

a $\alpha_i, \beta_{ij}, w_i$ jsou vhodné konstanty.

Definice: *Metoda polovičního kroku jednokrokové metody* je aposteriorní odhad

$$y_{2n}^{h/2} - y_n^h \sim K(\frac{h}{2})^p(2^p - 1),$$

z něhož lze určit neznámé K.

Definice: *k-krokovou metodou* rozumíme schéma

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i},$$

kde $f_j := f(x_j, y_j)$.

Věta: Pro obecnou funkci vícekrokové metody

$$G(z) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{i=0}^{k-1} (h\beta_i f_{n+i} - \alpha_i y_{n+i}) + h\frac{\beta_k}{\alpha_k} f(x_{n+k}, z)$$

existuje $h > 0$ takové, že G je kontrakce, a tedy pro libovolnou počáteční volbu z_0 posloupnost $z_{i+1} = G(z_i)$ konverguje k pevnému bodu y_{n+k}.

Definice: *Adams-Bashforthovy metody* jsou vícekrokové explicitní metody dané extrapolací do x_{n+1} polynomem spočteným na $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ a následnou aproximací integrálu $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$.

Definice: *Adams-Moultonovy metody* jsou vícekrokové implicitní metody dané interpolací polynomem spočteným na $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ a x_{n+1} s neznámým y_{n+1} a následnou aproximací integrálu $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$.

Definice: *Lokální diskretizační chybou vícekrokové metody* rozumíme

$$\tau(x,h) := \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x+ih) - \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x+ih, y(x+ih)).$$

Řekneme, že metoda je *řádu* p, pokud

$$\exists K > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a,b] \forall h \in (0,\delta) : |\tau(x,h)| \le K h^p.$$

Věta: Vícekroková metoda je řádu p právě tehdy, když $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$ a zároveň

$$\forall r \in \{1,\dots,p\} : \sum_{i=0}^{k} \frac{i^r \alpha_i}{r!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{i^{r-1}\beta_i}{(r-1)!}.$$