Lineární algebra I (pro fyziky)

Matice

Dalibor Šmíd

MFF UK

Minule jsme zavedli pojem matice $A = (\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_n)$ lineárního zobrazení $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a součin A s vektorem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$A\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$:= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \equiv F_A(\mathbf{x})$$

Označíme-li $\tilde{\mathbf{a}}_i$ i-tý řádek matice A, pak

$$F_A(\mathbf{x})_i \equiv (A\mathbf{x})_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots a_{in}x_n \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \equiv \tilde{\mathbf{a}}_i.\mathbf{x}$$

Uvažujme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Zajímá nás, na jaký vektor zobrazí F_A vektor $\mathbf{b}$ a které vektory se naopak zobrazí na něj. V prvním případě snadno spočteme, že

$$F_A(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.(-1) + 2.1 \\ 1.(-1) + 3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

V druhém hledáme obecný tvar vektoru $\mathbf{x}$, pro který

$$F_A(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

což je vlastně soustava dvou rovnic pro dvě neznámé x_1 a x_2. Každá rovnice je rovnicí přímky v $\mathbb{R}^2$, jsou různoběžné, jediným řešením (a tedy i jediným vzorem vektoru $\mathbf{b}$ v zobrazení F_A) je jejich průsečík, vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Co kdybychom hledali průsečnici dvou rovin v $\mathbb{R}^3$? Soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \end{aligned}$$

lze opět interpretovat jako rovnost vektorů

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Lineární kombinace na levé straně odpovídá definici součinu matice a vektoru, až na to, že matice A nemá stejný počet řádků jako sloupců. Pojďme tedy tuto definici rozšířit.

Definice

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ jsou vektory z $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Pak definujme matici $A = (\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}_n)$ a její součin s vektorem $\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} := x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

Matice s m řádky a n sloupci se označuje jako matice $m \times n$. Pokud $m = n$, říká se jí *čtvercová*. Rovnici nadroviny $\mathbf{a}.\mathbf{x} = c$ pak můžeme zapsat pomocí matice $1 \times n$ jako

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c$$

Matice vzniklá z matice A výměnou řádků za sloupce se nazývá *transponovaná*:

$$A^T \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

S pomocí operace transponování můžeme rovnici nadroviny napsat také jako $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = c$, přičemž sloupcový vektor $\mathbf{a}$ interpretujeme jako matici $n \times 1$.

Vraťme se k hledání průsečnice rovin a vezměme nějakou konkrétní matici A a konkrétní *vektor pravých stran* $\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešíme tedy *soustavu lineárních rovnic* (*SLR*)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Nahradíme-li druhou rovnici soustavy rozdílem druhé a první rovnice, množina řešení se nezmění $\clubsuit$. Novou soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + \ \ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

vyřešíme položením $x_3 := t \in \mathbb{R}$ a dosazením do druhé a poté do první rovnice: $\mathbf{x} = (1-t, -t, t)^T = (1,0,0)^T + t(-1,-1,1)^T$.

Množina řešení je tedy v souladu s očekáváním přímka. Prochází bodem $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ a má směrový vektor $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Podobně můžeme najít i *parametrické vyjádření* roviny $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$. Položíme neznámé $x_2 := t$, $x_3 := s$ rovny dvěma libovolným parametrům a dopočteme $x_1 = 1 - 2t - 3s$. Vektorově lze množinu řešení zapsat jako

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\},$$

tedy jako množinu „bod plus lineární kombinace směrových vektorů“. Takový tvar má množina řešení každé SLR ♣.

Uvažujme dvě zobrazení $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $F_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Složené zobrazení $F_B \circ F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ je opět lineární a jeho matici můžeme určit tak, že spočítáme obrazy vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$:

$$(F_B \circ F_A)(\mathbf{e}_i) = F_B(A\mathbf{e}_i) = F_B(\mathbf{a}_i) = B\mathbf{a}_i,$$

tedy pro obecný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$(F_B \circ F_A)(\mathbf{x}) = (B\mathbf{a}_1 | \dots | B\mathbf{a}_n)\mathbf{x}$$

To nám dává návod, jak definovat *součin matic*:

Definice

Nechť A je matice $m \times n$ a B je matice $p \times m$. Pak definujme

$$BA := (B\mathbf{a}_1 | \dots | B\mathbf{a}_n)$$

Z definice automaticky plyne, že $F_B \circ F_A = F_{BA}$. BA je matice $p \times n$, tedy má stejně sloupců jako A a řádků jako B.

Výhoda této definice je, že je konzistentní s dříve definovaným součinem matice a vektoru. Element matice BA na pozici ij je

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{im}a_{mj} \equiv \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj},$$

což je vlastně skalární součin $\tilde{\mathbf{b}}_i^T.\mathbf{a}_j$ i-tého řádku matice B a j-tého sloupce matice A. Odtud je jednoduše vidět, že

$$E_m A = A E_n = A,$$

kde E_m, E_n značí jednotkovou matici $m \times m$, resp. $n \times n$.

Další příznivou vlastností maticového násobení je jeho *asociativita*, tedy rovnost $(AB)C = A(BC)$, kdykoli mají součiny alespoň na jedné straně smysl. Plyne to z odvození

$$\begin{aligned}((AB)C)\mathbf{x} &= (F_{AB} \circ F_C)(\mathbf{x}) = F_{AB}(F_C(\mathbf{x})) = \\ &= F_A(F_B(F_C(\mathbf{x}))) = (F_A \circ F_{BC})(\mathbf{x}) = (A(BC))\mathbf{x},\end{aligned}$$

do nějž posléze dosadíme za $\mathbf{x}$ všechny prvky kanonické báze $\mathbf{e}_i$.

Součet matic (stejného typu) je definován podobně jako součet vektorů, tedy po elementech. Platí pak $F_A + F_B = F_{A+B}$ (♣). Podobně jako asociativita se pak ukáže ♣ též levá a pravá *distributivita* maticového násobení, tedy

$$\begin{aligned}(A+B)C &= AC + BC \\ A(B+C) &= AB + AC,\end{aligned}$$

kdykoli má alespoň jedna strana smysl.

Maticový součin ale určitě není komutativní. Je-li definován součin BA, součin AB definován být nemusí, případně nemusí být stejného typu:

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

I v případě, že jsou A i B matice $n \times n$ a tudíž i jejich součiny AB a BA, obvykle se tyto součiny nerovnají. Příklad už jsme viděli u rotací v prostoru, ale každý si snadno může vyrobit vlastní vygenerováním nějakých dvou „náhodných“ 2×2 matic.

Chceme-li nalézt inverzní zobrazení k $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, můžeme se pokusit jej hledat ve tvaru F_B pro nějakou matici B. Podmínka

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (F_B \circ F_A)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \ \wedge \ (F_A \circ F_B)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

znamená, že $BA = AB = E$ (dosaďte opět $\mathbf{x} := \mathbf{e}_i$). Matice B s touto vlastností se nazývá *inverzní* k A a značí se A^{-1}. Je snadné se přesvědčit ♣, že taková matice je nejvýše jedna a že z její existence už existence inverzního zobrazení plyne. Pro přehlednost ji zde značme nadále B. Z rovnosti $AB = E$ plyne, že její i-tý sloupec splňuje rovnici $A\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$. Další postup ukažme na příkladu s konkrétní volbou A a i:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

v němž jsme označili $\mathbf{x} := \mathbf{b}_1$.

Soustavu lineárních rovnic je zvykem zapisovat ve tvaru *rozšířené matice soustavy*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Každý řádek matice odpovídá rovnici roviny v $\mathbb{R}^3$, celá soustava pak hledání průniku tří rovin. Podobně jako dříve při hledání průsečnice můžeme první rovnici odečíst od druhé. V rozšířené matici se to projeví jako přičtení (-1)-násobku prvního řádku do druhého. Následně provedeme stejnou úpravu i se třetím řádkem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Symbol $\sim$ se čte „se převede ekvivalentní úpravou na“. *Ekvivalentní úpravy* jsou ty, které zachovávají množinu řešení.

Po přičtení dvojnásobku druhého řádku do třetího dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + \ \ x_3 &= -1 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Z ní postupným dosazením získáme $x_3 = -3$, $x_2 = 2$, $x_1 = 6$. Můžeme také dosazování nahradit dalšími ekvivalentními úpravami:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Získali jsme tak $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, první sloupec inverzní matice. Stejný výpočet s pravými stranami $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$ dá zbývající dva.

Pravé strany nemají vliv na to, které ekvivalentní úpravy volíme, můžeme tedy řešit všechny tři soustavy naráz, symbolicky

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme tedy, že matice za svislou čarou je jediná, která splňuje rovnost $AB = E$. Vynásobením snadno ověříme, že i $BA = E$, tedy $B = A^{-1}$. Víme ale, že tímto postupem získaná matice bude vždy dávat jednotkovou matici i při vynásobení z druhé strany? A že lze vždy buď najít ekvivalentní úpravy, kterými lze A^{-1} najít, nebo ukázat, že neexistuje?