

Name:

1	2	3	4	Σ

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

- 4 úlohy, 90 minut.
- Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).
- Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s vodou.
- Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).
- Číselné výsledky tvaru $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$ apod. není potřeba dále zjednodušovat.
- Tvzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.

-
1. (a) Zformulujte horní a dolní odhad na prostřední kombinační číslo $\binom{2n}{n}$. Odhady nemusíte dokazovat.
(b) Kolik čísl má $\binom{50}{25}$? (Můžete použít $e \approx 2.7$ a $2^{10} \approx 10^3$.)
(c) Pro sudé číslo $n \geq 2$ označme

$$A_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (n-2) \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-3) \cdot (n-1)}.$$

Dokažte, že pro každé sudé číslo $n \geq 2$ platí $A_n \leq \sqrt{2n}$.

[8 points]

2. (a) Definujte latinský čtverec řádu n .
(b) Definujte, kdy jsou dva latinské čtverce řádu n ortogonální.
(c) Zformulujte horní odhad na počet navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu n .
(d) Dokažte ho. [6 points]

3. (a) Zformulujte Hallovu větu o existenci párování.
- (b) Soupeř nám zadá 9 po sobě jdoucích přirozených čísel. Naším úkolem je označit k navzájem různých čísel z nich postupně $a_1, a_2, \dots, a_k$ tak, aby každé číslo a_i bylo násobkem čísla i . Například pro devítici 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 a $k = 5$ můžeme vybrat

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (11, 12, 18, 16, 15).$$

- i. Ukažte, že pro $k = 6$ nám soupeř může zadat devítici, pro kterou nelze úkol splnit.
- ii. Ukažte, že pro $k = 5$ lze úkol splnit vždy. (Hint: Můžete použít bez důkazu, že mezi každými $c \cdot d$ po sobě jdoucími přirozenými čísly existuje aspoň c násobků čísla d .)

[9 points]

4. (a) Definujte (n, k, d) -kód (nad abecedou $\{0, 1\}$).
(b) Uved'te příklad $(4, 2, 2)$ -kódu.
(c) Existuje $(4, 2, 3)$ -kód?

[7 points]

Extra page 1/2 if you need it.

Extra page 2/2 if you need it.
