

Písemka 3. 2. 2016

Příklad 1 (8 bodů). V osudí je umístěno 12 bílých a 8 černých míčů. Určete:

- (a) S jakou pravděpodobností ve třetím tahu táhneme bílý míček, taháme-li **bez vracení**?
- (b) Jaká je střední doba čekání na vytažení černého míčku, taháme-li bez vracení?
- (c) Jaká je pravděpodobnost, že jsme v prvním tahu vytáhli bílý míček, jestliže ve třetím tahu byl vytažen černý míček. Uvažujte obě situace: **s vracením i bez vracení**.
- (d)* Uvažujte situaci **s vracením**, kdy tahy ukončíme vytažením bílého a černého míče za sebou. Jaká je střední hodnota počtu vytažených bílých míčků?

→ **Příklad 2** (3 body). Zformulujte a dokažte princip inkluze a exkluze.

→ **Příklad 3** (5 bodů). X má exponenciální rozdělení s hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}[x > 0]$. Definujme $Y := [X]$ (tj. Y je dolní celá část X). Spočítejte $P(X \leq k)$ pro $k = 0, 1, \dots$. Jaké rozdělení má Y (určete včetně parametru)?
 $Y = \mathbb{Z}$

Příklad 4 (8 bodů). Anička je nadšená zahradnice. Vysadila 100 semínek a z předchozích zkušeností ví, že klíčivost semínek je jen 70 %. Po vyklíčení bude nutné přesadit malé rostlinky jednotlivě do kořenáčů.

- (a) Kolik kořenáčů si má Anička připravit, aby mohla rozsadit všechny rostlinky s 95%-ní pravděpodobností?
 - (b) Rostlinka po přesazení zakoření a přežije s pravděpodobností pouze 0,8. Kolik rostlinek přeživších přesazení má Anička očekávat z jejích původních 100 semínek?
 - (c) Po přesazení bude nutné přeživší rostliny po nějakou dobu zalévat 50 mililitry vody denně. Kolik nejméně vody Anička s 95%-ní pravděpodobností spotřebuje za 1 týden?
- (Klíčivost je pravděpodobnost, že zasazené semínko vyklíčí. Použijte asymptotické postupy.)

Příklad 5 (6 bodů). Definujte náhodný vektor, vysvětlete a spočítejte následující.

- (a) Distribuční funkce dvourozměrného náhodného vektoru a její vlastnosti.
- (b) Marginální rozdělení a jeho vztah ke sdruženému rozdělení. Jak poznáme nezávislost?
- (c) Kovariance a její vlastnosti.
- (d)* Uvažujte dva nezávislé hody **čtyřstěnnou** hrací kostkou. Určete **korelaci** mezi počtem bodů, které padly v prvním hodu a součtem bodů v obou hodech.

Příklad 6 (6 bodů). Zformulujte Sluckého větu. Předpokládejte, že máte k dispozici dva nezávislé náhodné výběry $X_1, X_2, \dots, X_n$ a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ z neznámých rozdělení. Využijte Sluckého větu k odvození (asymptotického) intervalového odhadu pro rozdíl $EX - EY$ středních hodnot. Jaké věty a za jakých předpokladů použijete?

Poznámky: Za každý příklad lze získat určený počet bodů, celkem 36. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň 19 bodů. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Ne vždy musí být výsledek jednoduše vyjádřitelný (jedna hodnota, jednoduchá funkce). Pokuste se výsledek dostat do co nejkompaktnějšího tvaru, ale pokud dostanete například řadu, s níž si nedokážete poradit, nemusí jít o chybu, ale o správný výsledek.

Oddělujte, prosím, zřetelně jednotlivé otázky a jejich podotázky. Výsledky přehledně запиšte.

Podepište všechny odevzdávané papíry a vyznačte jejich počet