

Cvičení 10 – Grupy a permutace

9. prosince 2025

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující množiny s příslušnými operacemi dávají (abelovskou) grupu:

- a) $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Z}, \cdot)$,
- b) prostá zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ se skládáním,
- c) matice 3×3 nad $\mathbb{C}$ s determinantem ± 1 ,
- d) $(R, +)$, $(R, \cdot)$, $(U(R), \cdot)$, kde R je okruh,
- e) množina všech slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, kde $aa^{-1} = bb^{-1} = e$ s konkatenací,
- f) rotace stěn Rubikovy kostky **Rb** se skládáním,
- g) $\mathcal{P}(X)$ s operací $\cap, \cup, \Delta$,
- h) matice tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ a platí, že $ad - bc = 1$.

Příklad 2. Určete řády prvků v následujících grupách:

- a) 4 a 15 v $\mathbb{Z}_{75}$,
- b) 7 a 9 v $\mathbb{Z}_{20}^*$,
- c) 4 a 15 v $\mathbb{Z}$,
- d) rotace o 144° v D_{10} ,
- e) matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v $GL_3(\mathbb{C})$,
- f) dvojice $(4, (142)(35))$ v direktním součinu $\mathbb{Z}_{70} \times S_6$, A_4 .

Příklad 3. Určete podgrupy a jejich řády příslušné následujícím grupám: $\mathbb{Z}_6$, S_3 , $\mathbb{F}_8^*$, D_6 , A_4 . Nakreslete jejich uspořádání podle inkluze.

Příklad 4. Zapište následující permutace jako součin nezávislých cyklů a pro každou permutaci σ určete σ^{-1} a σ^{2025} a jejich řády.

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$
- b) $(46512) \in S_6$
- c) $(156)(23847) \in S_8$
- d) $(435) \circ (512) \in S_5$

Příklad 5. Mějme $\pi, \tau \in S_n$. Pak ukažte, že je-li v cyklickém zápisu permutace prvek π prvek b hned po prvku a , pak je v cyklickém zápisu permutace $\sigma = \tau\pi\tau^{-1}$ prvek $\tau(b)$ hned po prvku $\tau(a)$.

Příklad 6. Pro $\pi = (13)(2564) \in S_6$ a $\tau = (1436)(25) \in S_6$ určete $\tau\pi\tau^{-1}$ a $\pi\tau\pi^{-1}$.

Příklad 7. Najděte všechny permutace $\tau \in S_4$ takové, že pro ně platí $\tau \circ (123) \circ \tau^{-1} = (124)$.

Příklad 8. Najděte prvek řádu 2, 3, 7 v grupě **Rb**.