MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA B

LUBOŠ PICK

Příklad B1. Vyšetřete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}(n) \operatorname{arccotg}(n) x^n.$$

(10 bodů)

Příklad B2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{2e^{4x} - 5e^{3x} + 8e^{2x} - e^x}{(e^{2x} - 2e^x - 3)(e^{2x} - e^x + 2)}\, dx$$

na všech maximálních intervalech, na kterých existuje. **(10 bodů)**

Příklad B3. Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_1^{\infty} \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}\, dx.$$

(10 bodů)

Příklad B4. Uvažujte zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definované předpisem

$$F(x,y) = \left(\operatorname{arctg}(2x-y), x-y, (x^2-y^2)\frac{|x|}{1+|y|}, e^{x+y}\right).$$

(a) Dokažte, že v bodě $[-1, 1]$ existuje derivace F a spočtěte její representující matici.
(b) Spočtěte $\frac{\partial F_3}{\partial x}(0,0)$, pokud existuje. **(10 bodů)**

Příklad B5. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku, nebo protipříkladem na jeho platnost.
(a) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim n a_n = 0$.
(b) Jestliže $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{|a_n|} = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje.
(c) Jestliže $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. **(10 bodů)**

$\boxed{B1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arccotg} n \cdot x^n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

<u>Řešení.</u> Protože

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2},$$

platí dle VO2S

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg} n} = 1.$$

Protože $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 1,$

platí $\exists n_0\ \forall n \geq n_0: \quad \frac{1}{2n} \leq \operatorname{arccotg} n \leq \frac{2}{n},$

a tedy $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{arccotg} n} = 1$ (VO2S).

Tudíž pro $x \in (-1,1)$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| < 1,$$

takže řada AK dle CLK.

Jestliže $x \in (1,\infty)$, pak plyne z výše uvedených nerovností, že $\lim a_n = \infty$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, takže řada D, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Jestliže $x \in (-\infty,-1)$, pak obdobně platí

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \infty \quad a \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -\infty,$$

tedy $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, tudíž opět $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ a řada D.

Jestliže $x=1$, plyne z výše uvedených nerovností, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}$, takže

řada D dle LSK a divergenci harmonické řady.

Jestliže $x=-1$, ~~potom~~ řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arccotg} n$$

konverguje dle Leibnizovy věty, neboť posloupnost $\{\operatorname{arccotg} n\}$ je klesající a platí $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} n = 0$. Protože posloupnost $\{\operatorname{arctg} n\}$ je rostoucí a omezená, plyne z AD kritéria, varianta A, že řada K.

<u>Závěr</u>: $\sum$ AK $\iff x \in (-1,1)$

$\sum$ K $\iff x \in [-1,1)$.

Hodnocení:

$\lvert x\rvert < 1$	1.
$\lvert x\rvert > 1$	1
$x = 1$	2
$x = -1$	5

$\boxed{B2}$ $$\int \frac{2e^{4x}-5e^{3x}+8e^{2x}-e^{x}}{(e^{2x}-2e^{x}-3)(e^{2x}-e^{x}+2)}\,dx =: I$$

Řešení: Substituce $y=e^x$, $dy = e^x dx$. Označ

$$I = \int \frac{2y^3-5y^2+8y-1}{(y^2-2y-3)(y^2-y+2)}\,dy .$$

Rozložíme integrand

$$\frac{2y^3-5y^2+8y-1}{(y^2-2y-3)(y^2-y+2)} = \frac{2y^3-5y^2+8y-1}{(y-3)(y+1)(y^2-y+2)}$$

$$= \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+1} + \frac{Cy+D}{y^2-y+2} .$$

Tedy

$$2y^3-5y^2+8y-1 = A(y+1)(y^2-y+2) + B(y-3)(y^2-y+2) + (Cy+D)(y-3)(y+1).$$

Pro $y=3$ dostaneme

$$54-45+24-1 = A\cdot 4\cdot 8 ,$$

$$32 = A\cdot 4\cdot 8 , \text{ tedy } A=1 .$$

Pro $y=-1$ dostaneme

$$-2-5-8-1 = B\cdot(-4)\cdot 4 ,$$

$$-16 = -16B, \text{ tedy } B=1.$$

Pro $y=0$ dostaneme

$$-1 = 2A - 6B - 3D = -4 - 3D,$$

$$3 = -3D, \quad \text{tedy } D = -1.$$

Pro $y = 1$ dostaneme

$$2 - 5 + 8 - 1 = 4A - 4B + (C+D)(-2)\cdot 2,$$

$$4 = 4 - 4 - 4C + 4, \quad \text{tedy } C = 0.$$

Tedy

$$\text{integrand } J = \frac{1}{y-3} + \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y^2 - y + 2}.$$

Dále jest

$$\int \frac{dy}{y-3} \stackrel{c}{=} \log|y-3|, \quad \int \frac{dy}{y+1} \stackrel{c}{=} \log|y+1|,$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - y + 2} = \int \frac{dy}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{4}{7} \int \frac{dy}{\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\left(y - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1}$$

$$\stackrel{c}{=} \frac{4}{7} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(y - \frac{1}{2}\right)\right),$$

$y \in (-\infty, -1)$, $y \in (-1, 3)$, $y \in (3, \infty)$.

Použijeme VOS2 pro

$(a,b) = (-\infty, \log 3)$ nebo $(\log 3, \infty)$,

$(\alpha, \beta) = (0, 3)$ nebo $(3, \infty)$,

$\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \log t$,

potom
- $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$,
- $\varphi^{-1}(x) = e^x$, $x \in (a,b)$,
- $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ existuje vlastní a nenulová $\forall t \in (\alpha, \beta)$.

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log|e^x - 3| + \log(e^x + 1) - \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(e^x - \frac{1}{2}\right)\right),$$

$x \in (-\infty, \log 3)$ nebo $x \in (\log 3, \infty)$.

Hodnocení:

substituce	2
rozklad	3
integrace parc. zlomků	3
záměr	2

$\boxed{B3}$ $$\int_1^\infty \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}\,dx =: \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Řešení: Pro $x \in (1, \frac{\pi}{2}]$ je

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}\ \cos x}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}},$$

a tedy $$0 \le f(x) \le \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}.$$

Polož

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad x \in (1, \tfrac{\pi}{2}]$$

potom g, h jsou spojité a nezáporné na $(1, \frac{\pi}{2}]$

$\int_1^{\pi/2} h$ konverguje, neboť $-\frac{1}{2} > -1$,

a platí

$$\lim_{x\to 1+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}-1)}.$$

Dále jest $$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = 1$$ a

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{1}{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}} = 4.$$

Tedy $\int_1^{\pi/2} g$ konverguje. Dle LSK tudíž plyne, že i $\int_1^{\pi/2} f$ konverguje.

Pro $x \in [\frac{\pi}{2}, 2]$ je $f(x)$ spojitá, tedy omezená (na omezeném intervalu), a tedy $\int_{\pi/2}^{2} f$ konverguje.

Pro $x \in (2, \infty)$ jest

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}.$$

Funkce $x \longmapsto \cos x$ je spojitá na $[2, \infty)$ a na $(2, \infty)$ má omezenou primitivní funkci $\sin x$. Funkce

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 1)}$$

je klesající a spojitá na $[2, \infty)$ a v ∞ má nulovou limitu. Dle AD kritéria tedy $\int_{2}^{\infty} f$ konverguje.

Platí $f \in \mathcal{N}(1, \frac{\pi}{2}) \cap \mathcal{N}(\frac{\pi}{2}, 2) \cap \mathcal{N}(2, \infty)$ a f je spojitá v bodech $\frac{\pi}{2}$ a 2. Tedy $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$.

Hodnocení: konvergence na $(1, \frac{\pi}{2}]$ 4

konvergence na $[\frac{\pi}{2}, 2]$ 1

konvergence na $(2, \infty)$ 4

závěr 1

$\boxed{B4}$ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$$F(x,y) = \left(\operatorname{arctg}(2x-y),\ x-y,\ (x^2-y^2)\frac{|x|}{1+|y|},\ e^{x+y} \right)$$

(a) $F(-1,1)$,

(b) $\dfrac{\partial F_3}{\partial x}(0,0)$.

Řešení. (a) Pro $x \in (-\infty,0)$ a $y \in (0,\infty)$ platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{1+(2x-y)^2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{1+(2x-y)^2},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = -1,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x^2}{1+y} - \frac{x^2-y^2}{1+y},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{1+y} + \frac{x(x^2-y^2)}{(1+y)^2},$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x}(x,y) = e^{x+y}, \quad \frac{\partial F_4}{\partial y}(x,y) = e^{x+y}.$$

Na množině $B([-1,1],1)$ jsou tedy všechny parciální derivace každé složky F spojité. Tedy existuje $F'(-1,1)$ a je reprezentována maticí

$$F'(-1,1) \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $$\frac{\partial F_3}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{F_3(t,0) - F_3(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2|t| - 0}{t} = 0.$$

Hodnocení:

(a)	parc. derivace	4
	existence F'	2
	matice	1
(b)	výpočet derivace	3

$\boxed{B5}$ (a) $\sum a_n$ K $\Rightarrow$ $\lim n a_n = 0$

(b) $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \sum a_n$ AK

(c) $\lim n a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ K

Řešení. (a) NEPLATÍ, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(b) PLATÍ pro $\varepsilon = 1$ najdu n_0:

$\forall n \geq n_0 : \; n\sqrt{|a_n|} \leq 1$

$\Leftrightarrow \qquad |a_n| \leq \frac{1}{n^2}$

$\overset{SK}{\Rightarrow} \quad \sum |a_n|$ K

(c) NEPLATÍ, $a_n = \frac{1}{n \log n}$, $n \geq 2$

Hodnocení. (a) 2

(b) 5

(c) 3