Lineární algebra II (pro fyziky)

Kvadratické formy

Dalibor Šmíd

MFF UK

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, B, B' jeho dvě báze a

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

bilineární forma na V. Pokud $u, v \in V$, $\mathbf{x} = [u]^B$, $\mathbf{y} = [v]^B$, pak

$$g(u,v) = \mathbf{x}^T G \mathbf{y} = \mathbf{x'}^T R^T G R \mathbf{y'} \equiv \mathbf{x'}^T G' \mathbf{y'}$$

kde $G := [g]_B$, $\mathbf{x'} = [u]^{B'}$, $\mathbf{y'} = [v]^{B'}$, $R = [\mathrm{Id}]^B_{B'}$, $G' = [g]_{B'}$. Matici G můžeme jednoznačně rozložit na součet matice symetrické a antisymetrické $G = \frac{1}{2}(G + G^T) + \frac{1}{2}(G - G^T)$, čemuž odpovídá i rozklad g na součet $g_S + g_A$, kde

$$g_S(u,v) := \frac{1}{2}(g(u,v) + g(v,u)), \quad g_A(u,v) := \frac{1}{2}(g(u,v) - g(v,u))$$

Bilineární forma g_S splňuje $\forall u, v \in V : g_S(u,v) = g_S(v,u)$, je tedy symetrická. Pro g_A platí $\forall u, v \in V : g_A(u,v) = -g_A(v,u)$, o takové bilineární formě říkáme, že je *antisymetrická*.

Definice

Nechť g je bilineární forma na V. Zobrazení $Q_g : V \to \mathbb{R}$ definované předpisem $Q_g(u) := g(u,u)$, nazýváme *kvadratická forma* na V příslušná bilineární formě g.

Protože $g_A(u,u)$ je vždy 0, je kvadratická forma určena pouze symetrickou částí bilineární formy g a z polarizační identity ♣

$$g_S(u,v) = \frac{1}{2}(Q_g(u+v) - Q_g(u) + Q_g(v))$$

plyne, že jednoznačně. Matici kvadratické formy $[Q_g]_B$ vzhledem k bázi B definujeme jako matici $[g_S]_B$ symetrické části příslušné bilineární formy. V dalším budeme předpokládat, že symetrická je už přímo g. Pak pro $u \in V$, $\mathbf{x} = [u]^B$, $G = [g]_B$ máme

$$Q_g(u) \equiv g(u,u) = \mathbf{x}^T G \mathbf{x}$$

Polární báze kvadratické formy je definována jako polární báze příslušné symetrické bilineární formy, víme, že vždy existuje. Umíme ji zatím nalézt dvěma způsoby:

- symetrickými úpravami matice G takovými, že $R^T G R$ je diagonální, pak je R matice přechodu z B do polární báze
- ortogonální diagonalizací matice G, která najde ortogonální matici U, pro niž $U^T G U$ je diagonální s vlastními čísly matice G na diagonále. Matice U je i zde matice přechodu z B do (určité speciální) polární báze.

VĚTA

Nechť B, C jsou dvě polární báze kvadratické formy Q_g na V. Pak je počet kladných hodnot na diagonále matic $[g]_B$ a $[g]_C$ stejný, a stejně tak počet záporných hodnot a počet nul.

Matice $[g]_B$, $[g]_C$ vzniknou jedna z druhé symetrickými úpravami, a ty zachovávají hodnost, počet nul tedy musí být stejný. Stačí proto větu dokazovat jen pro počet kladných.

Nechť $B = (u_i)_1^m$ a $C = (v_i)_1^m$ jsou seřazeny tak, že v maticích

$$[g]_B = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, 0, \dots, 0)$$
$$[g]_C = \mathrm{diag}(c_1, \dots, c_s, d_1, \dots, d_t, 0, \dots, 0)$$

jsou všechna čísla a_i, c_i kladná a všechna b_i, d_i záporná. Víme, že $p + q = s + t$, BÚNO předpokládejme $p > s$. Definujme podprostory $U := \langle u_1, \dots, u_p \rangle$, $W := \langle v_{s+1}, \dots, v_m \rangle$. Pak

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim U + W \geq p + (m - s) - m \geq 1$$

Tedy existuje nenulový $u = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i = \sum_{i=s+1}^{m} y_i v_i \in U \cap W$ a

$$Q_g(u) = ([u]^B)^T [g]_B [u]^B = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i^2 > 0$$

$$Q_g(u) = ([u]^C)^T [g]_C [u]^C = \sum_{i=s+1}^{s+t} d_{s-i} y_i^2 < 0$$

To je spor, musí tedy být $p = s$ a $q = t$.

Dokázaná věta je známá pod názvem *Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem* a umožňuje nám definovat *signaturu* kvadratické formy jakožto trojici nezáporných čísel (p, q, n), která udávají počet kladných, záporných a nulových elementů na diagonále matice kvadratické formy vzhledem k nějaké polární bázi. Víme už, že forma je pozitivně definitní, má-li její signatura tvar $(p, 0, 0)$. Další podobná označení jsou

- $(p, 0, n)$: *pozitivně semidefinitní*
- $(0, q, 0)$: *negativně definitní*
- $(0, q, n)$: *negativně semidefinitní*
- $(p, q, 0)$: *regulární indefinitní*
- (p, q, n): *singulární indefinitní*

Tytéž pojmy se vztahují i na symetrické bilineární formy a symetrické matice a po drobném rozšíření teorie i na hermitovské seskvilineární formy, hermitovské matice a samosdružené operátory.

Nechť $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, označme $G_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ její podmatici vzniklou vyškrtnutím posledních $n-k$ řádků a sloupců.

Věta (Jacobi-Sylvesterova)

Nechť g je symetrická bilineární forma na V, $B=(u_i)_1^m$ báze V, $G=[g]_B$ splňuje podmínku $\forall k \in \{1,\dots,m\} : \det G_k \neq 0$. Pak má g polární bázi $C=(v_i)_1^m$ takovou, že $v_k = \sum_{j=1}^k r_{jk} u_j$ pro nějakou regulární horní trojúhelníkovou matici $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a

$$[g]_C = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\det G_1}, \frac{\det G_1}{\det G_2}, \frac{\det G_2}{\det G_3} \dots, \frac{\det G_{m-1}}{\det G_m}\right)$$

Tedy signatura g je $(p,q,0)$, kde q je počet znaménkových změn v posloupnosti $(1, \det G_1, \dots, \det G_m)$.

Věta bývá označována také jako *Sylvestrovo kritérium* a je to další způsob určení signatury kvadratické formy, která ale musí být regulární. Důkaz trochu připomíná GS ortogonalizaci:

Zvolme $v_1 := \frac{1}{g_{11}} u_1$, pak $g(v_1, v_1) = \frac{1}{g_{11}}$. Předpokládejme, že jsme zkonstruovali vektory $(v_1, \ldots, v_{k-1})$, tedy i prvních $k-1$ sloupců matice R. Hledáme vektor v_k tak, aby pro $i < k$

$$g(u_i, v_k) \equiv g\left(u_i, \sum_{j=1}^{k} r_{jk} u_j\right) \equiv \sum_{j=1}^{k} g_{ij} r_{jk} = 0$$

Přidáme-li podmínku $g(u_k, v_k) = 1$, máme pro vektor $(r_{1k}, \ldots, r_{kk})$ soustavu rovnic s maticí G_k a pravou stranou $\mathbf{e}_k$. Protože $\det G_k \neq 0$, řešení soustavy existuje a je jednoznačné. Protože $g(u_j, v_k) = 0$ pro $j < k$, a $v_j \in \langle u_1, \ldots, u_j \rangle$, je $g(v_j, v_k) = 0$ pro $j < k$, tedy báze $C = (v_i)_1^m$ je polární pro g. Diagonální elementy $[g]_C$ získáme Cramerovým pravidlem:

$$g(v_k, v_k) = g\left(\sum_{j=1}^{k} r_{jk} u_j, v_k\right) = g(r_{kk} u_k, v_k) = r_{kk} = \frac{\det G_{k-1}}{\det G_k}$$

Nulová množina N_g kvadratické formy Q_g je množina všech vektorů $v \in V$ takových, že $Q_g(v) = 0$. Například pro Q_g na $\mathbb{R}^2$ s předpisem

$$Q_g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = x_1^2 - x_2^2$$

je $N_g = \langle (1,1) \rangle \cup \langle (1,-1) \rangle$, což není podprostor $\mathbb{R}^2$. Podobná situace nastává u všech indefinitních kvadratických forem. Jedna taková, tzv. prostoročasový interval, je důležitá pro speciální teorii relativity, a její nulové množině se říká světelný kužel. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, která zachovává obecnou kvadratickou formu Q_g s maticí $[g]_K^K = G$, musí splňovat $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$g(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T G A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T G \mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

neboli $A^T G A = G$. Pro Q_g prostoročasový interval se množina všech takových matic A nazývá Lorentzova grupa.