Písemka 15. února 2019

Každý příklad na **samostatný papír**, každý odevzdávaný papír podepište.

Příklad 1 (7 bodů). V několika neprůhledných sáčcích jsou umístěné různobarevné kuličky. V sáčku 1 jsou 3 bílé a 2 černé, v sáčku 2 jsou 4 bílé a 6 modrých, v sáčku 3 jsou 2 bílé a 3 černé a v sáčku 4 jsou 2 modré a 3 černé.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že z náhodně vybraného sáčku vytáhneme modrou kuličku?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme jsme si náhodně vybrali sáček číslo k, pokud jsme z něj vytáhli bílou kouli? Určete pro všechna k.
(c) Pokud z náhodně vybraného sáčku vytáhneme dvě koule bez vracení, jaký je střední počet modrých koulí, které vytáhneme?
(d) Jak byste mohli upravit složení sáčku 4, aby pravděpodobnost vytažení černé koule byla 1/3?

Příklad 2 (6 bodů). Definujte náhodný vektor.

(a) Pro dvourozměrný náhodný vektor definujte sdružené a marginální rozdělení (distribuční funkci).
(b) Jaké vlastnosti jsou pro sdruženou distribuční funkci nutné a postačující? (neboli: *co distribuční funkce splňuje a co splňovat musí?*)
(c) Na příkladu diskrétního dvourozměrného náhodného vektoru ukažte, že sdružené rozdělení jednoznačně určuje marginální, ale naopak toto neplatí.
(d)* Rozhodněte, zda funkce

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \{(x,y); x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 1\}, \\ 0 & \text{jinde}, \end{cases}$$

je či není distribuční funkcí.

Příklad 3 (7 bodů). Náhodná veličina X má spojité rozdělení dané hustotou

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x \exp(-ax) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

kde $a > 0$ je neznámý parametr.

(a) Najděte odhad parametru a metodou momentů. (Nezapomeňte, že k odhadu potřebujete náhodný výběr!)
(b) Je tento odhad nestranný a konzistentní? (Vysvětlete, co to znamená)
(c) Navrhněte alespoň dva odhady pravděpodobnosti $P[X < 1]$.

Příklad 4 (6 bodů). Jaromír si je dobře vědom, že mu přílišné hraní her na počítači neprospívá. Zapisuje si proto dobu, po kterou denně hraje.

(a) Po sto dnech zjistí, že celkový součet minut strávených hraním her je 9 400. Jak Jaromír odhadne svou průměrnou denní dávku ztraceného času?
(b) Po chvíli počítání zjistí i výběrový rozptyl, který je 49 min^2. Dá se na hladině spolehlivosti 0,95 říci, že Jaromír hraje v průměru 1h20min denně, nebo je jeho průměrné denní hraní významně odlišné od této hodnoty?
(c) S jakou pravděpodobností bude Jaromír v příštích 50 dnech hrát v průměru více než 96 minut denně, pokud nezmění své návyky?
(d)* Kdybyste místo výběrového průměru dostali informaci, že součet druhých mocnin času stráveného hraním je za 100 dní 890 000 min^2, jaká bude odpověď na bod (2)?

(Použijte vhodné odhady a přibližné metody založené na limitních větách. Hodnoty distribuční funkce normálního rozdělení použijte případně z tabulek.)

Příklad 5 (6 bodů). Předpokládejte dvě diskrétní náhodné veličiny X a Y.

(a) Jsou-li X a Y nezávislé, odvoďte vzorec pro určení rozdělení součtu $X+Y$. Jaké vlastnosti pravděpodobnosti přitom používáte?
(b) Jak se tento vzorec změní, pokud X a Y nejsou nezávislé?

(c) Najděte rozdělení $X + Y$ pro náhodný vektor (X, Y), který má rovnoměrné rozdělení na třináctibodové množině $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, |x| + |y| \leq 2\}$.

Příklad 6 (4 body). Při hodu mincí označme líc hodnotou 1 a rub hodnotou 0. Při hodu korunou a dvoukorunou označme X výsledek hodu korunou a Y výsledek hodu dvoukorunou. Zaveďme náhodnou veličinu Z

$$Z = \begin{cases} X + Y & \text{je-li } X = 0 \\ X - Y & \text{je-li } X = 1. \end{cases}$$

(a) Určete sdružené rozdělení náhodného vektoru (X, Z).

(b) Určete kovarianci $\mathrm{cov}(X, Z)$. Co z této hodnoty můžeme o vztahu X a Z usoudit?