Tvrzení: Prvočísel je nekonečně mnoho

Dk: Sporem

$p_1 < \dots < p_n$ jsou všechna prvočísla

$q := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

platí: $\forall i: q > p_i$ => q není prvočíslo

↳ musí to být složené číslo → musí být dělitelné prvočíslem

$\exists j$: p_j je dělitelem q : $p_j \backslash q$

↳ spor! → q je násobek všech prvočísel $+1$

↳ je to o jedna víc než násobek p_j

→ $q \bmod p_j = 1$ → není dělitelné p_j

SPOR ↯

■

- prázdné součty se kladou rovny nule

$S_n := 1 + 2 + \dots + n$

pokud $n = 0$:

$S_0 = 0$

↳ prázdný součet

- prázdný produkt je roven jedničce

Př $S_n := 1+2+3+\dots+n$

$S_n = n+(n-1)+(n-2)+\dots+1$

sečteme

$$2S_n = (1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\dots+(n+1)$$

$$= \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n \text{ sčítanců}}$$

$2S_n = n\cdot(n+1)$

$$S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- pokud n je celé číslo, tak $n\cdot(n+1)$ je vždy sudé
  ↳ součin dvou po sobě jdoucích čísel

Indukce

tvrzení $\varphi(n)$ pro $n\in\mathbb{N}$

Nechť $\varphi(0)$

$\forall n\in\mathbb{N}: \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

Pak $\forall n\in\mathbb{N}: \varphi(n)$

$\varphi(n): \quad S_n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

$\varphi(0): \quad 0 = \dfrac{0\cdot 1}{2} = 0 \; \checkmark$

$\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

$\uparrow$
indukční předpoklad $\rightarrow \; S_n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

chceme

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$$

$\blacksquare$

Geometrická řada

$$g_n := q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} \quad , \; q \in \mathbb{R}$$

zvolme $q = 10$
↳ kvocient

$g_1 = 10^0 = 1 \qquad\qquad g_0 = 0$

$g_2 = 10^0 + 10^1 = 11$

$g_3 = 10^0 + 10^1 + 10^2 = 111$

$\Rightarrow$ na každém řádu je právě jedna jednička

$\rightarrow \quad g_n = 111\dots1$

$\rightarrow$ je tam n jedniček

$$\underbrace{9\dots9}_{n} = 10^n - 1$$

$$g_n = \underbrace{1\_1}_{n} = \frac{10^n - 1}{9}$$

- pro $q = 7$

$$g_n = \frac{7^n - 1}{6}$$

- hypotéza:

$$g_n = \frac{q^n - 1}{q-1} \qquad \text{pro } q \neq 1, 0$$

- pro $q = 1$: $g_n = n$

↳ důkaz indukcí

$$\varphi(n) : \quad g_n = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$\varphi(0) : \quad g_0 = \frac{1-1}{\neq 0} = 0$$

$\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

↳ $$g_n = \frac{q^n - 1}{q-1} \Rightarrow g_{n+1} = g_n + q^n$$

$$g_{n+1} = \frac{q^n - 1}{q-1} + q^n = \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q-1}$$

$$= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$\blacksquare$

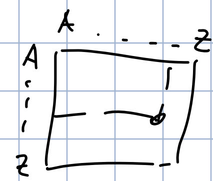
Jednotková čísla

$$J_n := \underbrace{1 \ldots 1}_{n}$$

Kombinatorika

① # 8-znakových řetězců z $\{A, \dots, Z\}$

$$26 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 26 = 26^8$$



② # 8-znakových řetězců bez opakování znaků

$$26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 19 = 26^{\underline{8}}$$

↳ klesající mocnina

③ # přesmyček slova $\underbrace{\text{KRUTOVLADCE}}_{11 \text{ písmen}}$

$$11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 1 = 11^{\underline{11}} = 11!$$

↳ permutace

④ # přesmyček slova $\underbrace{\text{JEZEVEC}}_{7 \text{ písmen}}$, E se třikrát opakuje

↳ permutace s opakováním

$\text{J}E_1\text{Z}E_2\text{V}E_3\text{C}$ $7!$ přesmyček

$E_1 E_2 E_3$ $3!$ přesmyček

$$\left.\begin{matrix} 7! \text{ přesmyček} \\ 3! \text{ přesmyček} \end{matrix}\right\} \quad \underline{\underline{\frac{7!}{3!}}}$$

• Princip počítání dvěma způsoby

přesmyček s indexy $= 7!$ = # přesmyček bez indexu • # oindexování

↳ # přesmyček bez indexu $= \dfrac{7!}{\#\text{ oindexování}}$

(5) # bezpečná rozestavění

8 věží na šachovnici 12×8

↳ Mám stejný počet věží jako počet sloupců → v každém sloupci právě jedna věž a žádný sloupec prázdný

$r_1, \dots r_8$, r_i = řádek v němž je věž i-tého sloupce
$\in \{1, \dots 12\}$ různá

↳ počítám všechny možnosti jak vybrat osmici čísel od jedné do dvanácti která jsou navzájem různá

→ $12^{\underline{8}}$

↳ konstruuju posloupnost délky osm z 12 prvků

(6) # bezpečného rozestavění

5 věží na šachovnici 12×8

použiju princip dvojího počítání :

jak přiřadit řádek

nezávislé na sobě

jak přiřadit sloupec

$$\frac{\text{\# rozestavění oindexovaných věží}}{\text{\# oindexování věží}} = \frac{12^{\underline{5}} \cdot 8^{\underline{5}}}{5!}$$

Zobecnění předchozích úloh:

(1) # řetězců délky k z n-prvkové abecedy, s opakováním

n^k = # funkcí (zobrazení) z $\underbrace{\{1, \dots k\}}_{A}$ do $\underbrace{\{1, \dots n\}}_{B}$

$|A| = k$ $\quad$ $|B| = n$

(2) — " — , bez opakování

$n^{\underline{k}}$ = # prostých funkcí ...?

$3^{\underline{5}} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) = 0$

↳ pokud $k > n \rightarrow n^{\underline{k}} = 0$

(3) # přesmyček n-znakového slova (s různými znaky)

$n!$ = # bijekcí mezi $\{1, \dots n\}$ a $\{1, \dots n\}$

(4) # neuspořádaných k-tic různých prvků vybraných z n prvků

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k}$$

(Př) # podmnožin z množiny $\underbrace{\{1, \dots n\}}_{[n]}$

$n = 3$ $\quad \{1, 2, 3\}$

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$

$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$

$\emptyset$ $\{1,2,3\}$

} 8 podmnožin

- pro každý prvek z množiny $\{1, \dots n\}$ se určím rozhodnout, jestli patří do podmnožiny anebo ne

↳ 2^n možností jak podmnožiny vybrat

- odvození přes kódování objektů
  ↳ budu překládat podmnožiny na posloupnosti nul a jedniček

$$A \subseteq \{1, \dots n\}$$

$$\downarrow$$

$$x_1 \dots x_n \quad , \quad x_i = \begin{cases} 0 & i \notin A \\ 1 & i \in A \end{cases}$$

↳ charakteristická posloupnost podmnožin

000 , 100 ...

↳ mám n-místný slovo, kde na každé místo mám volbu dát 0 nebo 1 → dvě možnosti

$\Rightarrow 2^n$

→ n-krát volím jestli 0 nebo 1 → 2 možnosti

- počet sudých a lichých podmnožin je stejné

$\mathcal{S} := \{ A \subseteq [n] \mid |A| \text{ je sudý} \}$ → množina všech sudých podmnožin

$\mathcal{L} := \{ A \subseteq [n] \mid |A| \text{ je lichý} \}$ → množina všech lichých podmnožin

dá bijekci mezi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}$ $\Rightarrow |\mathcal{S}| + |\mathcal{L}| = 2^n$

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$$

↳ pokud n v podmnožině nebylo, tak ho přidám
pokud n v podmnožině bylo, tak ho smažu

$$\downarrow$$

$$A \subseteq [n] \rightarrow \begin{cases} A \cup \{n\} & \text{pokud } n \notin A \\ A \setminus \{n\} & \text{pokud } n \in A \end{cases}$$

↳ v řeči charakteristických posloupností jsme z poslední číslice udělali 0 když byla 1 a naopak

je to bijekce mezi sudými a lichými
↳ pokaždé tato transformace podmnožina zvětší o jeden prvek nebo zmenší o jeden prvek
→ velikost byla sudá, tak se stane lichou
→ velikost byla lichá, stane se sudou

⇒ bijekce → sudých a lichých je stejně → je jich 2^{n-1}

(Pf) # k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

→ je to jako případ (4)

= kombinační číslo
= binomický koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

to stejné jako: # posloupností n nul a jedniček ve kterých je právě k jedniček

= # přesmyček slova $\underbrace{0\ldots0}_{n-k}\underbrace{1\ldots1}_{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

(!)

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{\# k-prvkových podmnožin z n-prvkové množiny}} = \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{\# k-prvkových podmnožin neobsahující } n} + \overbrace{\binom{n-1}{k-1}}^{\text{obsahují } n}$$

Pascalův trojúhelník

- tabulka všech kombinačních čísel

$k=n-1 \quad k=n \quad k=0 \quad k=1 \quad k=2 \quad k=3 \quad k=n-2 \quad k=n-3$

$$
\begin{array}{lcccc}
n=0 & & \binom{0}{0} & & \\
n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

- řádky odpovídají n
- diagonály doleva dolů odpovídají k

Binomická věta

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n} = xxx\dots x + x\dots xy + $$

↳ členy budou posloupnosti x a y délky n

↳ 2^n členů

členy tvaru $x^{n-k}y^k$

↳ n-tice x a y, kde je právě k y

↳ kolik je způsobů jak z n pozic vybrat k-tic, kde budou y

↳ $\binom{n}{k}$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k$$

$$0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots$$

↪ sudých podmnožin je stejně jako lichých

Teorie diskrétní pravděpodobnosti

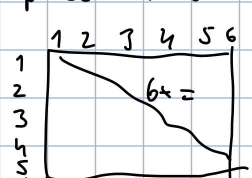
- pravděpodobnost
  - empirický: $\dfrac{\text{\# pokusů kdy padla 6}}{\text{\# počet pokusů}} \to \dfrac{1}{6}$
  - matematický model náhody: $\dfrac{\text{\# výsledků kdy padla 6}}{\text{\# možných výsledků}} \to \dfrac{1}{6}$

① Kostka

- padla 6 ... $\frac{1}{6}$
- padlo sudé číslo ... $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- padlo prvočíslo ... $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

② Dvě kostky (kostky jsou rozlišitelné) ... 36 možností

- padlo (1,6) ... $\frac{1}{36}$
- na 1. kostce padla 6 ... $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- na dvou kostkách padlo totéž ... $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- 1. > 2.
  $\frac{15}{36}$



na diagonále 6× rovnost
↪ nad a pod diagonálou stejně → 15, 15, 6

3) Narozeninový paradox

Mám 30 lidí v místnosti, jaká je pravděpodobnost, že alespoň 2 lidé mají narozeniny ve stejný den

↳ budu počítat 1 − pravděpodobnost, že nikdo nemá ve stejný den narozeniny

$$\frac{365^{\underline{30}}}{365^{30}} \doteq 0{,}294$$

$$1 - 0{,}294 \doteq 0{,}706$$

4) Falešná kostka

$P(6) = \frac{1}{2}$

$P(x) = \frac{1}{10}$

↳ pro $x \neq 6$

$$P(\text{sudé}) = \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\frac{1}{10}} + \underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{\frac{1}{10}} + \underset{\substack{\uparrow \\ 6}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{10}$$

DEF: Diskrétní pravděpodobnostní prostor se skládá z

Ω = konečná spočetná množina elementárních jevů

$p : \Omega \to \langle 0, 1 \rangle$, téhle funkci říkáme pravděpodobnost

přičemž platí

$$\sum_{w \in \Omega} p(w) = 1$$

suma přes všechny elementární jevy

- Ω je konečná $\to$ konečný pravděpodobnostní prostor
- pravděpodobnostní prostor je klasický $\iff$ $\forall w \in \Omega$: $P(w) = \frac{1}{|\omega|}$

DEF: Jev je podmnožina Ω

DEF: Jev $A \subseteq \Omega$ má pravděpodobnost

$$P(A) := \sum_{w \in A} p(w)$$

Základní obraty

- pro $A \subseteq \Omega$: $\bar{A} := \Omega \setminus A$

jev opačný

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- pokud $A \subseteq B \subseteq \Omega$, tak

$$P(A) \leq P(B)$$

- pokud A, B : $A \cap B = \emptyset$, tak

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

DEF: Jevy A, B jsou nezávislé, právě když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

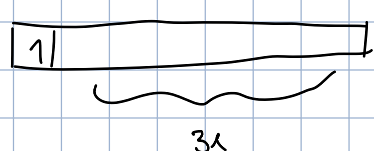
Př: 32 karet zamícháme

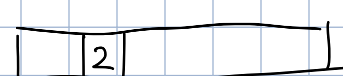
↳ Ω = množina všech permutací na $\{1, \dots 32\}$

J = "1 je na 1. místě"

D = "2 je na 2. místě"

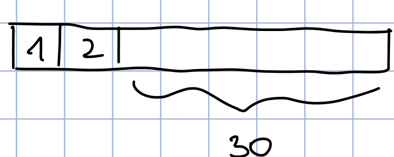
$$P(J) = \frac{31!}{32!} = \frac{1}{32} \qquad P(D) = \frac{31!}{32!} = \frac{1}{32}$$





$J \cap D$ = "1 je na 1. místě a 2 je na 2. místě"

$$P(J \cap D) = \frac{30!}{32!} = \frac{1}{32 \cdot 31}$$



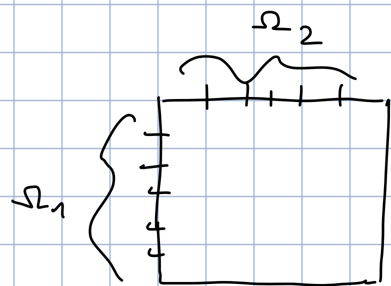
$P(J \cap D) \neq P(J) \cdot P(D)$ => jevy jsou na sobě závislé

↳ tím, že jsme řekli, že 1 je na 1. místě, tak jsme omezili výběr možností na druhé pozici, protože víme, že tam 1 nebude
↳ tu dvojku vybíráme z 31 karet a ne z 32 karet

- Dvojice pokusů

(Ω_1, p_1)

(Ω_2, p_2)



$$\Omega := \{(a,b) \mid a \in \Omega_1,\ b \in \Omega_2\}$$
$$= \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$p((a,b)) := p_1(a) \cdot p_2(b)$$

DEF: Jevy $A_1, \dots A_n$ jsou po k nezávislé, právě když

$$\forall I \in \binom{\{1, \dots n\}}{k} : \quad p\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} p(A_i)$$

← množina všech k-prvkových podmnožin z $\{1, \dots n\}$

↑ množina indexů $A_1, \dots A_n$

↳ I je k-prvková podmnožina množiny $\{1, \dots n\}$

DEF: Jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, právě když jsou po k nezávislé pro $\forall k \in \{2, \dots n\}$.

PF Jevy po dvou nezávislé, ale po třech ne

Dvojice hodu mincí

$\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$

$A = \{10, 11\}$ → na 1. minci padla 1

$B = \{01, 11\}$ → na 2. minci padla 1

$C = \{00, 11\}$ → padl sudý počet 1

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(B) = P(C)$

$\underset{\{11\}}{P(A \cap B)} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$ ✓ nezávislé

$\underset{\{11\}}{P(A \cap C)} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$ ✓

$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$ ✓

↳ Trojice jevů je po dvou nezávislá

$\underset{\{1,1\}}{P(A \cap B \cap C)} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

↳ A, B, C nejsou po třech nezávislé

(PŘ) 3 kartičky : ČČ, ČZ, ZZ

vybereme si náhodnou kartičku a položíme ji náhodnou stranou na stůl
strana otočená nahoru je červená.
Jaká je pravděpodobnost, že opačná strana je také červená?

pravděpodobnostní prostor → kartičky a náhodně je položíme
→ 3 kartičky s 2 stranami
↳ 6 možností jak položit :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\check{C}}\,\check{C} & \underline{\check{C}}\,Z & \cancel{\underline{Z}\,Z} \\ \check{C}\,\underline{\check{C}} & \cancel{\check{C}\,\underline{Z}} & \cancel{Z\,\underline{Z}} \end{array}$$

→ to, co je podtržený je nahoře

víme, že byla červená nahoře → nemohlo nastat

↳ zbyly 3 možnosti : $\underline{\check{C}}\check{C}$, $\check{C}\underline{\check{C}}$, $\underline{\check{C}}Z$

↳ a jen ve dvou z těchto tří možností je druhá strana taky červená

↳ $P(x) = \frac{2}{3}$

DEF: Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky jevu B, $P(B) \neq 0$, je

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A, B nezávislé $\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\iff P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

nebo $P(B) = 0$

↳ A a B nezávislé jsou, právě když se podmíněná pravděpodobnost A rovná nepodmíněné pravděpodobnosti A

↳ znalost toho, že nastalo B nijak neovlivňuje pravděpodobnost A

Př Hodím dvěma kostkami → rozlišitelnými X, Y
jaká je pravděpodobnost, že ty dvě čísla co jsme hodili, mají rozdíl 1

$$P(\underbrace{\{(x,y) \mid |x-y|=1\}}_{S \to \text{sousedi}}) = P(S)$$

hodila jsem 1. kostkou
jaká je pravděpodobnost, že druhá kostka přinese sousední číslo

1 2 3 4 5 6

→ pokud padne 1 nebo 6 → mám jen $\frac{1}{6}$ pp, že je soused

pokud padne 2, 3, 4, 5 → mám $\frac{1}{3}$ pp, že 2. hod soused

$$E := \{(x,y) \in \Omega \mid x \in \{1,6\}\}$$

↳ na 1. kostce padla 1 nebo 6

$$P(S|E) = \frac{1}{6}$$

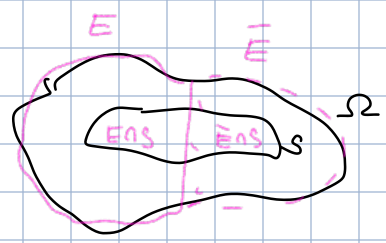
↳ pravděpodobnost, že nastali sousedi za podmínky extrému

$$P(S|\bar{E}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

↳ pravděpodobnost, že nastali sousedi když nebyl extrém

$$\frac{1}{6} = P(S|E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} \quad P(S\cap E) = \frac{1}{18}, \quad P(E) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = P(S|\bar{E}) = \frac{P(S \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} \quad P(S\cap \bar E) = \frac{2}{9}, \quad P(\bar E) = \frac{2}{3}$$



$$(S \cap E) \cup (S \cap \bar{E}) = S$$

$$P(S) = P(S \cap E) + P(S \cap \bar{E})$$

$$= \frac{1}{18} + \frac{2}{9} = \underline{\underline{\frac{5}{18}}}$$

$$P(S) = P(S|E) \cdot P(E) + P(S|\bar{E}) \cdot P(\bar{E})$$

VĚTA: O úplné pravděpodobnosti / O rozboru případů

Nechť $A \subseteq \Omega$ a $B_1, \dots B_k$ <u>rozklad</u> Ω,

↳ $B_1, \dots B_k \subseteq \Omega$

$i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$

$\forall i : B_i \neq \emptyset$

$\bigcup_i B_i = \Omega$

takový že $\forall i : P(B_i) \neq 0$.

↳ aby fungovala podmíněná pp

Pak $P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

PF $N :=$ "je nemocný" $\bar{N} =$ "je zdravý"

$T :=$ "test je pozitivní"

pravděpodobnostní prostor = náhodný výběr testované osoby

$P(T|N)$
↳ nemocnému vyjde test pozitivní

$P(T|\bar{N})$ → falešné pozitivní
↳ zdravému vyjde test pozitivní

víme

chci zjistit pp toho, že člověk, který má pozitivní test, je nemocný

$$P(N|T) = \frac{P(T \cap N)}{P(T)}$$

$$P(T|N) = \frac{P(T \cap N)}{P(N)}$$

$$P(N|T) = \frac{P(T|N) \cdot P(N)}{P(T)}$$

znám $P(N)$ → poměr nakažených lidí v populaci

potřebuju $P(T)$ → náhodnému člověku vyjde pozitivně test

↳ spočítám pomocí věty o rozboru případů

$$P(T) = P(T|N) \cdot P(N) + P(T|\bar{N}) \cdot P(\bar{N})$$

a už můžu spočítat $P(N|T)$

VĚTA : Bayesova

Nechť $A \subseteq \Omega$, $B_1, \dots B_k$ je rozklad Ω, t.ž. $\forall i: P(B_i) \neq 0$, $P(A) \neq 0$,
Pak $\forall i$:

$$P(B_i | A) = \frac{\overbrace{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}^{= P(A \cap B_i)}}{\underbrace{\sum_j P(A|B_j) \cdot P(B_j)}_{= P(A)}}$$

$$\hookrightarrow P(B_i | A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)}$$

PF Šatnářka

Ω = všechna permutace na množině $\{1, \dots n\}$

$\pi \in \Omega$: $\pi(i)$ je klobouk vydaný i-tému pánovi
↑ permutace

$\pi(i) = i$ } pevný bod fce π
→ pán dostal svůj klobouk

my se ptáme : jaká je pp jevu, že náhodně vybraná permutace na množině $\{1, \dots n\}$ nemá žádný pevný bod
↳ žádný pán nedostal svůj klobouk

$A := \{ \pi \in \Omega \mid \forall i : \pi(i) \neq i \}$ → permutace bez pevného bodu

$P(A) = ?$

- $n = 0$ $P = 1$
- $n = 1$ $P = 0$
- $n = 2$ 12, 21 $P = 1/2$
- $n = 3$ 123, 132, 213, 231, 312, 321 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

→ jen 2 permutace bez pevného bodu

- $n=5$ 21 453 } možnosti pokračování bez pevného bodu → 2

534

23 154

451 — " — > 3

514

↳ rozbije se pravidelnost možností pokračování bez pevného bodu pro prefixy

→ musíme na to jinak

Budeme počítat permutace, které mají alespoň 1 pevný bod

↳ rozebereme případy, kdy je který bod pevný

např. pro $n=3$:

- pevný bod může být na 1. pozici

  1 _ _

  ↳ pak mám 2 možnosti jak pokračovat

- pevný bod na 2. pozici

  _ 2 _

  ↳ 2 možnosti jak pokračovat

- pevný bod na 3. pozici

  _ _ 3

  — " —

↳ ale teď jsme nějaké permutace započítávali vícekrát

↳ platí $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

↳ triviální případ principu inkluze a exkluze

VĚTA: PIE (Princip inkluze a exkluze)

Pro konečné množiny $A_1, \dots A_n$ platí:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{\{1,\dots,n\}}{j}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

↳ velikost sjednocení všech množin

↳ součet přes všechny j-tice indexů

chci projít všechny j-tice množin

↳ nemůžu procházet přes množiny, kdyby nějaké byly stejné

↳ budu vybírat z indexů $\{1,\dots n\}$

j nám říká, kolika množinami pronikáme

I ... množina indexů

teď pomocí PIE vyřešíme problém šatnářky

$$A_i := \{\pi \in \Omega \mid \pi(i) = i\}$$

↳ $A_1, \dots A_n$ → na tyhle množiny použijeme PIE

$$\left|\bigcup_i A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot \underbrace{\sum_{I \in \binom{\{1,\dots,n\}}{j}} \underbrace{\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}_{(n-j)!}}_{\binom{n}{j}\cdot(n-j)! \;=\; \frac{n!}{j!}} =$$

faktoriál z n mínus kolik množin pronikám → $(n-j)!$

↳ # permutací s nějakým pevným bodem

↑ počet možných výběrů j-tice

$|A_i| = (n-1)!$

↳ jedna pozice přilepená (pevný bod), zbytek jakkoliv

$i \neq j$

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$\vdots$

$$\left|\bigcup_i A_i\right| = \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \dots \pm \frac{n!}{n!}$$

↳ toto chceme odečíst od $n!$ ↳ tohle je počet možností s pevným bodem → my chcem bez

takže my chceme:

$$n! - \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \dots \pm \frac{n!}{n!} \right) =$$

$$n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} - \dots \pm \frac{n!}{n!} \quad / : n!$$

↳ tohle je počet permutací → nás zajímá pravděpodobnost
⇒ vydělím celkovým počtem permutací → $n!$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} - \frac{3}{3!} \dots = \underline{\underline{\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{e}$$

$\blacksquare$

↳ konec šatnářky

PIE:

Pro $A_1, \dots A_n$ konečné množiny platí:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Ekvivalentně:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Dk: pro každý prvek sjednocení množin $A_1, \dots A_n$ počítat, kolikrát jsme ho do pravé strany započítaly
↳ chceme dokázat, že jsme ho dohromady započítali právě jednou

Pro libovolný prvek $x \in \bigcup_i A_i$ uvažujme, kolikrát ho pravá strana započítá.

Nechť $k :=$ počet i takových, že $x \in A_i$ $(1 \leq k \leq n)$
↳ v kolika množinách leží x

1) $j = k$ → uvažujeme tolikatice množin, v kolika množinách to naše x leží
↳ x bude ležet právě v jedné z těchto j-tic

$(-1)^{k+1}$ → kolikrát ho započítáváme
↳ právě jeden z průniků velikosti k nám ho započítá → započítá ho buď kladně nebo záporně → podle toho, jestli k sudé / liché

2) $j > k$ → pronikáme více než k množin, tak v alespoň jedné z nich ten náš prvek x není
↳ nezapočítáme x nikdy v takových případech

0

3) $j < k$ → prvek je v k množinách a my pronikáme j-tice, tak máme $\binom{k}{j}$ možností, jak vybrat j-tici z těch množin, ve kterých prvek je
↳ ve všech ostatních j-ticích ten prvek není

$(-1)^{j+1}\binom{k}{j}$

Tedy celkově ten prvek započítáváme:

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \cdot \binom{k}{j}$$

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} = \circledast = 1$$

$$(1+(-1))^n \overset{\text{Binomická v.}}{=} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \binom{n}{j} = \circledast + \overbrace{\binom{n}{0}}^{1} = \circledast + 1$$

↳ skoro ta naše suma, ale ta naše jde od 1
→ upravíme

$$\parallel$$

$$0^n = 0$$

↳ pokud $n > 0$

↳ což v našem případě je

$\circledast = 1$

Teď každý prvek přispěl k pravé straně právě jednou

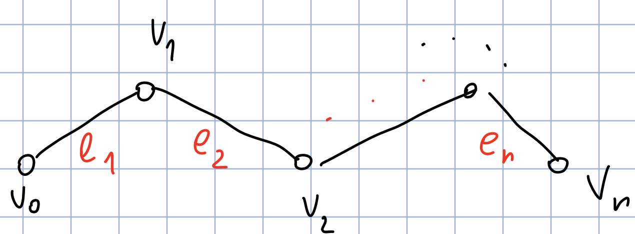
■

Teorie grafů

DEF: Graf je (V, E), kde V je množina vrcholů, konečná a neprázdná. ← uspořádaná dvojice množin
E je množina hran.
$E \subseteq \binom{V}{2}$

↳ množina všech dvouprvkových podmnožin vrcholů

- mezi každými dvěmi vrcholy vede nejvýše jedna hrana
- vrcholy x a y jsou spojené hranou : $\{x, y\} \in E$
- vrchol nemůže být spojen hranou sám se sebou → nemohou existovat smyčky → není dvouprvková množina



DEF: <u>Sled</u> v grafu (V, E)
Posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$, kde

$\forall i : v_i \in V$
$\forall j : e_j \in E$
$\forall j : e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$

DEF: <u>Tah</u> je sled bez opakování hran

DEF: <u>Cesta</u> je tah bez opakování vrcholů ← to tranzitivně znamená, že se neopakují hrany
(sled bez opakování hran a vrcholů)

DEF: <u>Tah</u> je <u>eulerovský</u>, právě když obsahuje všechny vrcholy i hrany.

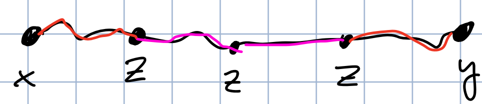
DEF: Sled je
- <u>uzavřený</u>, právě když $v_0 = v_n$ ← skončím ve vrcholu, kde jsem začala
- <u>otevřený</u>, právě když $v_0 \neq v_n$

DEF: Graf je souvislý, právě když $\forall x,y \in V$ $\exists$ cesta mezi x a y

LEMMA: Pokud mezi x,y existuje sled, pak mezi nimi existuje i cesta

Dk: Nechť S je nejkratší sled mezi x,y.
S je buď cesta nebo ne. Pokud je cestou, hotovo.
Pokud ne, tak chceme dojít do sporu s tím, že je nejkratší.

Kdyby S nebylo cestou, tak se na něm musí opakovat nějaký vrchol. Označme z opakující se vrchol



Teď vystřihneme návštěvu od 1. z do posledního z
A bereme x do první návštěvy z a z od poslední návštěvy do y a spojíme.
To je sled S', který je mezi x,y a je kratší než S, ale S měl být nejkratší. SPOR ↯

■

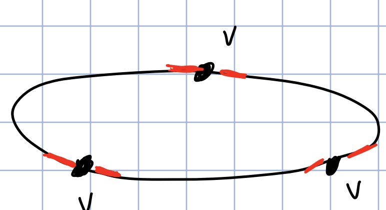
→ Nejkratší sled musí být cestou.

Tzn, že pokud má graf eulerovský tah, pak je souvislý

DEF: Stupeň vrcholu v:

$$\deg(v) := |\{e \in E \mid v \in e\}|$$

Graf s uzavřeným eulerovským tahem má $\forall v$: $\deg(v)$ sudý



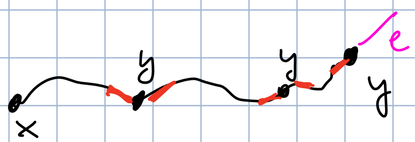
v účastnící se mají dvojice hran, které se nepřekrývají
↳ nestane se —o—o—
→ to by byla smyčka → v s v
Všechny hrany, kterých se v účastní jsou rozdělené do párů → jsou sudé

VĚTA: Graf má uzavřený eulerovský tah, právě když G je souvislý a G má všechny vrcholy sudého stupně.

(Dk) (=>) už umíme -> 2 pozorování

(<=) uvážíme nejdelší tah a ukážeme, že je nutně uzavřený a eulerovský
Nechť T je nejdelší tah v G.

1) T je uzavřený tah
↳ kdyby nebyl uzavřený, dostaneme se do sporu s tím, že je nejdelší
↳ obměněná implikace
Kdyby byl otevřený



$x \neq y$
uvnitř tahu se může víckrát vyskytovat y

Každý vnitřní výskyt y, má kolem sebe dvojici hran a y na konci má jen jednu takovou hranu
↳ lichý počet hran, ale my předpokl., že ∀ vrcholy sudý stupeň

=> alespoň jednu hranu y jsme ještě nepoužili
↳ hrana o kterou ten tah můžeme prodloužit
=> máme delší tah

Tzn, že:
Na T leží lichý počet hran z y, ale stupeň y sudý
=> existuje hrana e z y, která není v T

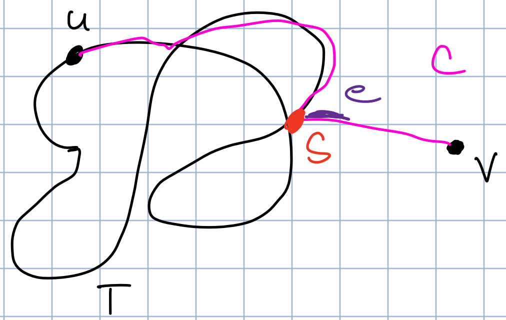
$T' := T + e$ je delší tah -> T nemohlo být nejdelší

Jakýkoliv otevřený tah dokážeme rozšířit o alespoň 1 hranu
↳ není nejdelší.

Tzn, že T musí být uzavřené.

2) Teď ukážeme, že nejdelší tah je eulerovský
T obsahuje všechny vrcholy

Pokud by chyběl vrchol v:



na tahu T určitě leží alespoň jeden vrchol. Označíme u.
my předpokládáme, že graf je souvislý → mezi u a v musí vést nějaká cesta
↳ tedy jdeme z u do v.
Ale můžeme jít z v do u. → narazím na vrchol s, který je od v na cestě nejbližší ležící na tahu
část mezi s a v obsahuje alespoň jednu hranu e
a já chci ukázat, že o tuto hranu e jde tah rozšířit → nemohl být nejdelší

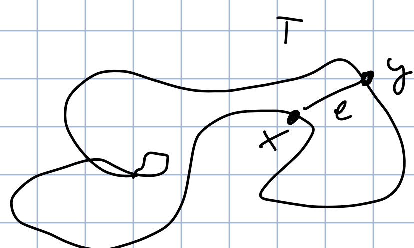
Vím, že tah T je uzavřený → je to cyklická posloupnost
→ můžu ji rozstřihnout v libovolném místě
rozstřihneme v průchodu s a na jeden z konců posloupnosti přidáme hranu e → máme tah T', který je delší než T

↳ T nemohl být nejdelší

Zvolíme vrchol u na T. Díky souvislosti $\exists$ C cesta mezi u, v.
S := nejbližší vrchol cesty C ve směru od v, který leží na T.
$S \neq V$.
e := hrana na C z s směrem k v.
T rozstřihneme v libovolné návštěvě s a na konec přidáme e.
→ T' tah delší než T.

3) T obsahuje všechny hrany

Vím, že T obsahuje všechny vrcholy.
Kdyby chyběla hrana $e = \{x, y\}$, tak x, y jsou v T.



teď zase T rozstřihneme třeba v y a na konec přilepíme hranu e a zase máme další tah → tudíž tohle se nemůže stát pokud T bude nejdelší možný tah.

↳ dokáže se to stejně jako ve 2)

Teď nejdelší tah musí být nutně uzavřený, nechybí žádný vrchol ani hrana. Tzn., že je T uzavřený eulerovský tah.

$\blacksquare$

DEF: <u>Orientované grafy</u> (V, E)

$$E \subseteq V^2 = V \times V$$ → připouští i smyčky

DEF: Souvislost v orientovaných grafech

- silná: $\forall x, y \in V : \exists$ cesta z x a y
- slabá: podkladový graf je souvislý

Pr: $\underset{a}{o} \to \underset{b}{o} \leftarrow \underset{c}{o}$ slabě souvislý

↳ podkladový graf: $\underset{a}{o} - \underset{b}{o} - \underset{c}{o}$ souvislý

DEF: Stupeň orientovaného grafu

- stupeň
  - vstupní $\deg^{in}(v)$
  - výstupní $\deg^{out}(v)$

DEF: Graf je vyvážený, právě když $\forall v: \deg^{in}(v) = \deg^{out}(v)$

VĚTA: Uzavřený eulerovský tah v orientovaných grafech:

Pro G orientovaný je ekvivalentní:

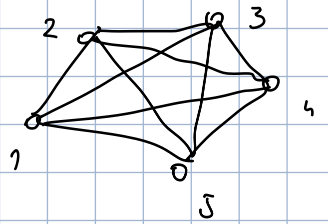
1) G je vyvážený a slabě souvislý
2) G má uzavřený eulerovský tah
3) G je vyvážený a silně souvislý

Dk $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$
triviální

Úplný graf K_n ($n \ge 1$)

- z n vrcholů, kde každý vrchol spojený s každým

K_5



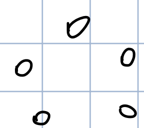
$V := \{1, \dots n\} = [n]$

$E := \binom{V}{2}$

Prázdný graf E_n ($n \ge 1$)

- n vrcholů, žádné hrany

E_5

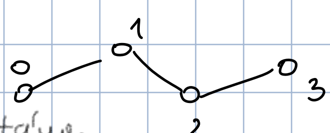


$V := \{1, \dots n\}$

$E := \emptyset$

Cesta P_n ($n \ge 0$)

P_3



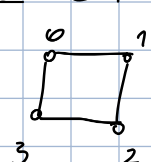
↳ počítáme hrany

$V := \{0, \dots n\}$

$E := \{\{i, i+1\} \mid 0 \le i < n\}$

Cyklus C_n ($n \ge 3$)

C_4

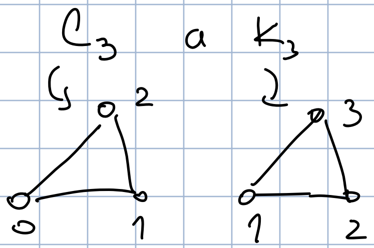


$V := \{0, \dots n-1\}$

$E := \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \le i < n\}$

„DEF": Grafy jsou izomorfní, právě když se liší pouze pojmenováním vrcholů

C_3 a K_3 izomorfní $\rightarrow$ $C_3 \cong K_3$



$K_2 \cong P_1$, $K_1 = E_1 \cong P_0$

DEF: Graf je k-regulární, právě když $\forall v \in V : \deg(v) = k$

Graf je regulární, právě když $\exists k$: graf je k-regulární

Př

- K_n je $(n-1)$-regulární
- E_n je 0-regulární
- P_n pro $n \geq 2$ není regulární
- C_n je 2-regulární

VĚTA:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Dk: $\#(e, v)$ $e \in E$, $v \in e$, takové dvojice počítáme dvěma způsoby

- vybíráme hrany a pro každou se podíváme, kolik konců hran k ní patří $\rightarrow$ 2 konce hran $\rightarrow$ celkový počet konců hran je $2 \cdot |E|$
- vybíráme vrchol a pak se ptáme kolik hran s ní utvoří tu dvojici $\rightarrow$ stupeň vrcholu $\rightarrow$ součet stupňů vrcholů

Důsledky: Princip sudosti (nefunguje pro nekonečné grafy)

- $\sum_{v \in V} \deg(v)$ je sudý

- vrcholů lichého stupně je sudý počet

DEF: Graf $G = (V, E)$ je <u>podgrafem</u> grafu $G' = (V', E')$ $\equiv$

$$V \subseteq V' \wedge E \subseteq E'$$

Značíme $G \subseteq G'$

DEF: Podgraf grafu $G = (V, E)$ indukovaný množinou $V' \subseteq V$, $V' \neq \emptyset$, je

$$G[V'] = \left(V', E \cap \binom{V'}{2}\right)$$

PF

Graf: podgraf: indukovaný podgraf:

Když vybírám vrcholy z původního grafu musím v indukovaném podgrafu zachovat všechny hrany mezi nima

↓ podgraf H takový že H je izomorfní s P_n

DEF: <u>Cesta v grafu</u> G je $H \subseteq G : \exists n : H \cong P_n$

<u>Kružnice v grafu</u> G je $K \subseteq G : \exists n : K \cong C_n$

- cesta definovaná posloupností má začátek a konec, cesta definovaná jako podgraf ne

- sled nebo tah se nedá popisovat jako podgraf
  ↳ nemůžu podgrafem popsat to, že jsem hranou prošla víckrát
  ↳ dobrý důvod proč rozlišovat sledy a cesty

Komponenty souvislosti jsou maximální souvislé podgrafy
↳ podgrafy, které jsou souvislé, ale když vezmeme větší podgraf, tak už souvislý nebude

DEF: <u>K je komponenta souvislosti</u> G $\equiv$

$$K \subseteq G \;\wedge\; K \text{ je souvislý}$$
$$\wedge\; \forall K' :\; K \subsetneq K' \subseteq G \qquad K' \text{ není souvislý}$$

↑ "ostrý" podgraf
↳ K' je větší než K

Tvrzení: G je souvislý $\Longleftrightarrow$ # komponent souvislosti G = 1

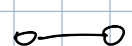
↳ platí, ale rozbilo by se to, kdybychom připouštěli graf bez vrcholů

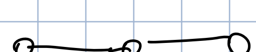
(?) Maximální # hran grafu s n vrcholy = $\binom{n}{2}$
↳ všechny dvojice vrcholů v úplném grafu

(?) Maximální # hran grafu o n vrcholech, na kterém nejsou trojúhelníky (C_3 jako podgraf)

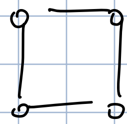
DEF: $T(n)$:= maximální # hran v grafu na n vrcholech, který neobsahuje C_3.

$T(1)=0$ 

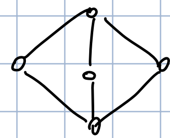
$T(2)=1$ 

$T(3)=2$ 

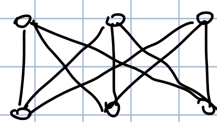
$T(4) = 4$



$T(5) = 6$



$T(6) = 9$



$K_{3,3}$

DEF: <u>Úplný bipartitní graf</u> $K_{m,n}$ $(m,n \geq 1)$

$V := \{1, \dots m, 1', \dots n'\}$

$E := \{\{i, j'\} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$

DEF: Graf $G = (V,E)$ je <u>bipartitní</u> $\equiv$ $\exists V_1, V_2$ rozklad V, t.ž.

$E \cap \binom{V_1}{2} = \emptyset \wedge E \cap \binom{V_2}{2} = \emptyset$

↳ mezi vrcholy v jedné partitě nevedou vrcholy

V_1, V_2 ... partity
↳ množiny

↳ nejsou hrany mezi vrcholy V_1 uvnitř ani V_2 ale jen mezi V_1 a V_2

☺ $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ je bez $\triangle$ $\Rightarrow$ $T(n) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$ pro sudé n

↳ alespoň počet hran toho úplného bipartitního grafu na $\frac{n}{2}$ a $\frac{n}{2}$ vrcholech
→ velikost jedné partity krát velikost druhé partity
→ $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$
↳ je spojený každý s každým

Platí rovnost → $T(n) = \frac{n^2}{4}$, dokážeme

VĚTA: Pro sudé $n \geq 2$: $T(n) = \frac{n^2}{4}$

Dk $T(n) \geq \frac{n^2}{4}$ platí díky $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$

$T(n) \leq \frac{n^2}{4}$ dokážeme indukcí dle n

↳ dokážeme indukcí pro sudá n, $n \geq 2$

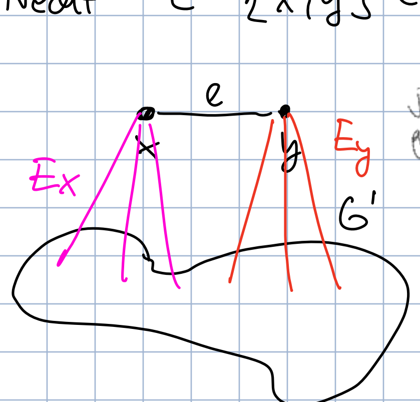
→ základní případ $n = 2$

1) $n = 2$: $T(2) \leq 1$ ✓

2) $n \to n+2$

Uvažme G na $(n+2)$ vrcholech bez Δ.
BÚNO v tomto grafu existuje alespoň jedna hrana.
Pokud neexistuje žádná hrana, tak graf má 0 hran → $\leq \frac{n^2}{4}$ ✓

Nechť $e = \{x, y\} \in E$



jako vyp. podgraf indukovaný všemi hranami krom x, y → zbytek grafu

$G' := G[V']$

$V' := V \setminus \{x, y\}$

G měl $n+2$ vrcholů → G' má n vrcholů

→ Na G' můžu použít IP

↳ $|E'| \leq \frac{n^2}{4}$

Teď máme ještě hranu mezi x a y a hrany spojující $\underbrace{x \text{ s } G'}_{E_x}$ a $\underbrace{y \text{ s } G'}_{E_y}$

Všimneme si, že do žádného vrcholu G' nemůže vést zároveň hrana z x a hrana z y → vznikl by Δ

Vrcholy do kterých je v G' připojený x je disjunktní s množinou vrcholů do kterých je připojeno y v G'

$\Rightarrow$ hran v E_x a hran v E_y je nejvýše n

$$|E_x| + |E_y| \le n$$

↳ protože v G' je n vrcholů

hran celého G $\le \frac{n^2}{4} + n + 1$

↳ se spojující x a y

↳ hrany v $E_x + E_y$

↑ hrany uvnitř G'

↳ odhad z IP

$$\frac{n^4}{4} + n + 1 = \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+2)^2}{4}$$

↑ horní mez, kterou jsme chtěli dokázat

∎

VĚTA: Pro $n \ge 2$ sudé jsou všechny extremální grafy bez Δ izomorfní s $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$

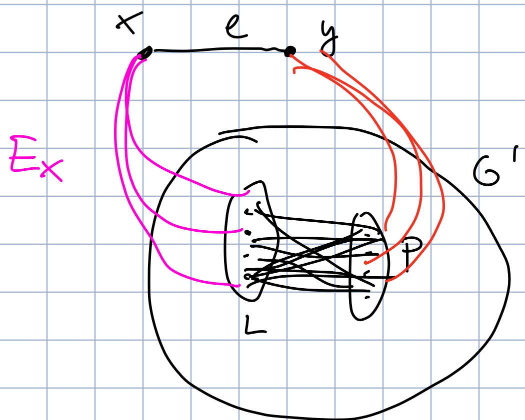
Dk: Indukcí podle n

1) $n=2$  $\cong K_{1,1}$ ✓

2) $n \to n+2$

kdyby G' nebylo extremální, tak to dohromady má málo hran

G' má extremální počet hran
↳ plyne z ☺



z IP plyne, že G' je izomorfní s $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$

↳ G' můžu rozdělit na dvě partity L a P

$|L| = |P| = \frac{n}{2}$ vrcholů $\qquad |L| + |P| = n$

Nemůže se stát, že by hrany z x vedly do L i do P
→ vznikl by Δ

☺

↳ všechny sousedé x v G' jsou ve stejné partitě
↳ všechny sousedé y v G' jsou taky v jedné partitě

Velikost $|E_x| + |E_y| = n$ → počet hran

↳ sousedé x a y nemohou být v jedné partitě → do té druhé by nic nevedlo

☺

⇒ určitě sousedé x jsou v jedné partitě, BÚNO v L

a určitě sousedé y v druhé partitě, BÚNO v P

a dohromady musí využít všechny vrcholy v obou partitách
↳ musí být n hran

☺

↳ x je spojeno s celým L, y spojeno s celým P

proto G' extremální

Tím pádem jsme ukázali, že celý graf G je úplný bipartitní, protože x je spojeno se všemi vrcholy v levé partitě → můžeme ho přidat do pravé partity a y je spojeno se všemi vrcholy v pravé partitě a můžeme ho přidat do levé partity

Takže $L \cup \{y\}$ a $P \cup \{x\}$ jsou partity grafu izomorfního s $K_{\frac{n+2}{2}, \frac{n+2}{2}}$

$\blacksquare$

Stromy

DEF: <u>Kostra grafu</u> je podgraf se všemi vrcholy, který je minimální souvislý (je souvislý, ale odebráním libovolné hrany přestane být)

- každý souvislý graf má kostru

DEF: Strom je graf, který je minimální souvislý

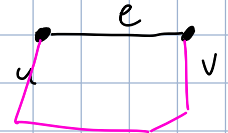
LEMMA: G je strom $\Leftrightarrow$ G je souvislý $\wedge$ acyklický

Dk: Pro G souvislý chceme:
G minimálně souvislý $\Leftrightarrow$ G je acyklický
↳ budeme dokazovat negaci obou stran:

G není minimálně souvislý $\Leftrightarrow$ G obsahuje cyklus

$\Leftarrow$ G obsahuje cyklus a když z cyklu odeberu hranu, tak neporuším souvislost → místo cesty přes hranu můžu zvolit cestu druhým směrem kolem
→ neporušili jsme souvislost → graf nemohl být minimální souvislý

$\Rightarrow$ graf není minimální souvislý $\Rightarrow \exists e \in E : G - e$ je souvislý



→ když smažu e, tak je furt souvislý $\Rightarrow \exists$ cesta mezi u a v a pokud k této cestě vrátíme e, tak máme cyklus

$\blacksquare$

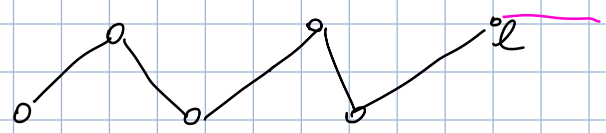
DEF: <u>Les</u> je acyklický graf

Komponenty lesa jsou stromy

DEF: <u>List</u> grafu je vrchol stupně 1

LEMMA: Každý strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 1 list

Dk: Uvažme nejdelší cestu P a její krajní vrchol ℓ



Uvidíme, že koncový vrchol ℓ je list.
Kdyby nebyl, tak to znamená, že z něj vede nějaká další hrana, která není součástí cesty.
↳ kam vede tato hrana? → 2 možnosti
- buď vede někam na cestu, což znamená, že v grafu byl cyklus → spor ↯
- nebo vede mimo cestu, ale pak přidáním této hrany vznikne delší cesta → spor P nejdelší ↯

Tzn, že krajní vrchol ℓ musí být list.
To platí i pro druhý koncový vrchol
→ každý strom s aspoň 2 vrcholy má alespoň 2 listy.

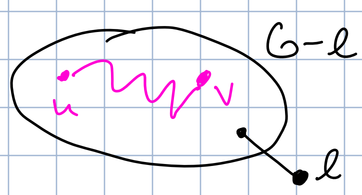
■

Lemma: Nechť G je graf a ℓ je jeho list.
Pak G je strom $\Leftrightarrow$ $G-\ell$ je strom
↳ odebírám vrchol ℓ a všechny hrany co do něj vedly

- $G-\ell := G[V(G) \setminus \{\ell\}]$ → indukovaný podgraf zbylých vrcholů

Dk: G je souvislý a acyklický $\Leftrightarrow$ $G-\ell$ je souvislý a acyklický

($\Rightarrow$) $G-\ell \subseteq G$ je acyklický



chci ukázat, že $G-\ell$ je souvislý

teď chci ukázat, že mezi každými dvěma vrcholy u a v v $G-l$ existuje cesta

G bylo souvislé → tedy cesta mezi u a v v G existuje
a zároveň l nemůže ležet na té cestě
↳ l je list – vrchol stupně jedna → nemůže být vnitřním vrcholem cesty

⇒ původní cesta v G neobsahuje l ⇒ cesta existuje i v $G-l$
↳ tohle jsme mohli udělat pro libovolné dvojice u, v v $G-l$

⇒ $G-l$ je souvislý

(⇐) chceme ukázat, že G je souvislý

→ obměněná implikace

kdyby nebylo, tak má alespoň 2 komponenty, v jedné z komponent je l, v ostatních ne
→ existuje alespoň jedna komponenta G, ve které není l, zároveň tato komponenta musí být i komponentou $G-l$
→ tato komponenta neobsahuje všechny vrcholy
↳ $G-l$ musí mít ještě alespoň jednu komponentu → $G-l$ není souvislý

chci ukázat, že G je acyklický:
víme, že $G-l$ je acyklický → v G nemůže vzniknout cyklus, protože na žádném cyklu neleží l (má stupeň 1), takže jakýkoliv cyklus v G by byl cyklem i v $G-l$, ale tam nejsou

■

VĚTA: Strom s n vrcholy má $(n-1)$ hran.

Dk Indukcí podle n

1) $n=1$: $E = \emptyset$ ✓

2) $n \to n+1$:
Nechť T je strom s $(n+1)$ vrcholy.
Tzn, že $\exists l$: l je list v T.
$T' := T-l$ je strom (plyne z lemmatu) s n vrcholy

tzn, že použijeme IP $\to$ T' má (n-1) hran
$\Rightarrow$ T má n hran
↳ T má o 1 hranu více než T' $\to$ hrana vedoucí z listu

∎

VĚTA: Souvislý graf G s n vrcholy a (n-1) hranami je strom.

(Dk) Tvrzení: Pokud $n \geq 2$, tak G obsahuje list
↳ Dk:

$$\sum_v \deg(v) = 2 \cdot |E| = 2 \cdot (n-1) = 2n-2$$

↳ součet stupňů

podíváme se na průměr stupně vrcholů

$$\frac{\sum_v \deg(v)}{n} = \frac{2(n-1)}{n} < 2$$

↳ průměr stupňů je < 2
↳ průměr je menší než 2 $\Rightarrow$ minimum je menší než 2

$\to \exists v : \deg(v) < 2$

$\Rightarrow \deg(v) = 0 \lor \deg(v) = 1$

↳ nemůže být 0 $\to$ souvislý graf a má aspoň 2 vrcholy

$\Rightarrow \exists v : \deg(v) = 1 \to v$ je list

∎

Teď víme, že pokud mám souvislý graf, který má o 1 méně hran než vrcholů a ten graf má alespoň 2 vrcholy, tak v grafu existuje list.

Důkaz indukcí podle n:

1) $n = 1$ ✓
2) $n \to n+1$
Mějme graf G s (n+1) vrcholy a n hranami.
Podle tvrzení $\exists v$: v je list v G.
$G' := G - v$ je souvislý a má n vrcholů a (n-1) hran
↳ použijeme IP: odebráním listu se nemění souvislost

G' je strom, zas použijeme Lemma (G je strom $\Leftrightarrow$ $G-\ell$ je strom)
$\Rightarrow$ G je strom

$\blacksquare$

VĚTA: Ekvivalentní vlastnosti stromů:

Pro graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1) G je souvislý a acyklický
2) G je minimální souvislý
3) G je maximálně acyklický
4) G je souvislý $\wedge$ $|E(G)| = |V(G)| - 1$
5) G je acyklický $\wedge$ $|E(G)| = |V(G)| - 1$
6) G je jednoznačně souvislý
   ↳ $\forall u, v \in V(G) : \exists! P$ cesta v G mezi u, v

Dk: Cvičení pro čtenáře

týká se 2 objektů

množina všech uspořádaných dvojic $\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

DEF: Binární relace mezi množinami A, B je podmnožina $A \times B$.
Pokud $A = B$, pak je to relace na množině A.

(Př) Příklad relací na $A := \{1,2,3,4,5\}$

(1) Rovnost

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

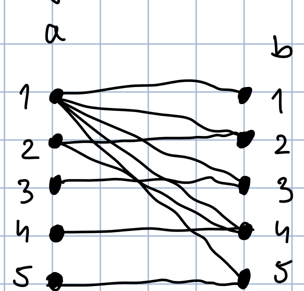
	1	2	3	4	5
1	X				
2		X			
3			X		
4				X	
5					X

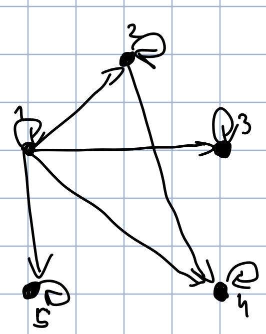
identická relace (diagonální relace)

$$id_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$$

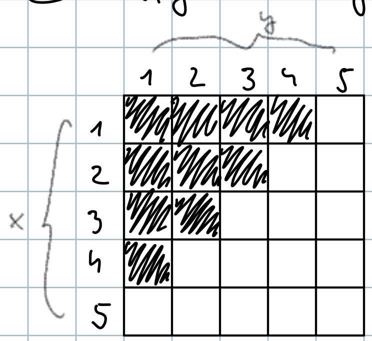
(2) Dělitelnost $a \mid b$ (a je dělitelem b)

a \ b	1	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2		X		X	
3			X		
4				X	
5					X





(3) $x, y : x + y \leq 5$



(4) Prázdná relace $\emptyset$ $\rightarrow$ nejsou tam žádné dvojice

(5) Univerzální relace $\rightarrow$ obsahuje všechny dvojice
$A \times B$

DEF: K relaci R mezi A a B je <u>inverzní relace</u> R^{-1} mezi B a A:

$$R^{-1} := \{(b,a) \mid b \in B,\ a \in A,\ (a,b) \in R\}$$

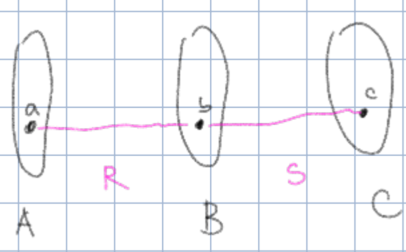
nebo-li:

$$aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$$

- pro čtvercové znázornění transponuje
- bipartitní graf $\rightarrow$ jen prohodíme partity
- orientovaný graf $\rightarrow$ změníme směr šipek

DEF: <u>Složení</u> relací R mezi A, B a S mezi B, C je $R \circ S$ mezi A, C, tž:

$$a(R \circ S)c \equiv \exists b \in B : (aRb \wedge bSc)$$



$R \circ id_B = R = id_A \circ R$

$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

DEF: Funkce /zobrazení (→ pro nás totéž) z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B t. ž.:

$$\forall a \in A : \exists! b \in B : a f b$$

$(\forall a \in A : deg(a) = 1)$

$f : A \to B$

$f(a) = b \equiv a f b$

$id_A : A \to A$

DEF: Funkce $f : A \to B$ je

- prostá: $\forall a, a' \in A : a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$
  ↳ $\forall b \in B : deg(b) \leq 1$
- „na": $\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a)$
  ↳ $\forall b \in B : deg(B) \geq 1$
- bijektivní: $\forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$

f^{-1} je funkce z B do $A \Leftrightarrow f$ je bijekce

Př

1) $\sin : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$

2) $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$

3) $\operatorname{card} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

↳ kardinalita (mohutnost)

4) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Jsou-li $f : A \to B$, $g : B \to C$, pak $f \circ g : A \to C$

$(f \circ g)(a) = g(f(a))$

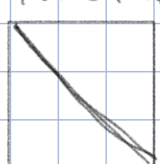
↳ skládání relací

DEF: Relace R na množině A je:

- Reflexivní $\equiv \forall a \in A : aRa$
- Symetrická $\equiv \forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$
- tranzitivní $\equiv \forall a, b, c \in A : aRb \land bRc \Rightarrow aRc$
- antisymetrická $\equiv \forall a, b \in A : aRb \land bRa \Rightarrow a = b$

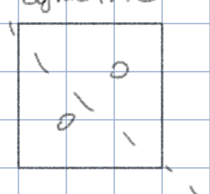
↳ slabá antisymetrie

Reflexivita



$id_A \subseteq R$

Symetrie



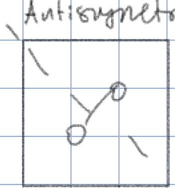
$R^{-1} = R$

↳ prvky symetrické podle diagonály

↳ buď tam oba jsou nebo oba nejsou

→ matice symetrická vůči transpozici

Antisymetrie



$R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

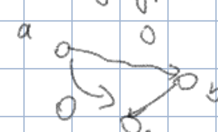
když vidím pár prvků symetrické přes diagonálu, tak nikdy nejsou v relaci oba současně

Tranzitivita

↳ není vidět z tabulek

→ orientovaný graf

$R \circ R \subseteq R$



pokud vede šipka z a do b a z b do c, tak existuje šipka a do c

DEF: Relace R na A je ekvivalence $\equiv$ R je reflexivní, symetrická, tranzitivní

Př. Příklady ekvivalencí

1) Rovnost na $\mathbb{N}$

2) $\equiv_n$ na $\mathbb{Z}$: $x \equiv_n y \iff x \bmod n = y \bmod n$

3) Geometrická shodnost Δ v $\mathbb{R}^2$

4) Geometrická podobnost Δ v $\mathbb{R}^2$

5) $\approx$ na $2^{\mathbb{N}}$: $x \approx y \iff \exists f: x \to y$ bijekce

↳ pro konečné množiny to znamená to, že mají stejný počet prvků

6) Pro graf $G = (V, E)$ relace $\sim$ na V.

$u \sim v \iff \exists$ cesta v G mezi u, v

} dosažitelnost

↳ reflexivní: triviální cesta z u do u

symetrická: můžu prohodit dva koncové vrcholy v neorientovaném grafu

tranzitivní: mám cestu z u do w a cestu z w do v

↳ slepím a mám sled → můžu ho zjednodušit na cestu

7) Pro orientovaný graf (V, E), $\approx$ na V:

} obousměrná dosažitelnost

$u \approx v \iff \exists$ cesta v G z u do v $\land$ $\exists$ cesta v G z v do u

DEF: Ekvivalenční třída prvku x:

$$R[x] := \{y \in A \mid x R y\}$$

$$= \{y \in A \mid y R x\}$$ → symetrické

☺ Ekvivalenční třídy jsou vždy neprázdné

$$\forall x \in A: x \in R[x]$$

(PŘ) Ekvivalenční třídy příkladů ekvivalencí

1) $\{x\}$

2) n ekvivalenčních tříd odpovídajícím zbytkům mod n

5) ekvivalenční třídy odpovídají velikostem podmnožin
→ ekvivalenční tř., kde je prázdná množina, ekv. tříd. kde všechny jednoprvkové podmnožiny, ...
navíc máme jednu ekv. tříd., kde jsou všechny nekonečné
↳ ekvivalenční třídy odpovídají hodnotám fce card

6) komponenty souvislosti

7) komponenty silné souvislosti

VĚTA: Pro ekvivalenční třídy ekvivalence R na A platí:

1) $\forall x \in A: \quad R[x] \neq \emptyset$

2) $\forall x, y \in A: \quad R[x] = R[y] \quad \vee \quad R[x] \cap R[y] = \emptyset$

3) $\{ R[x] \mid x \in A \}$ určuje R

↳ množina všech ekvivalenčních tříd nám určuje ekvivalenci

Dk

1) $x \in R[x] \Rightarrow R[x] \neq \emptyset$ ✓

3) $yRx \Leftrightarrow y \in R[x]$ ✓

↳ to stejné jako $x \in R[y]$

↳ je to symetrické

2) budu dokazovat, že kdykoliv dvě ekvivalenční třídy mají neprázdný průnik, tak už jsou si rovny

chceme dokázat, že $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset \Rightarrow R[x] = R[y]$

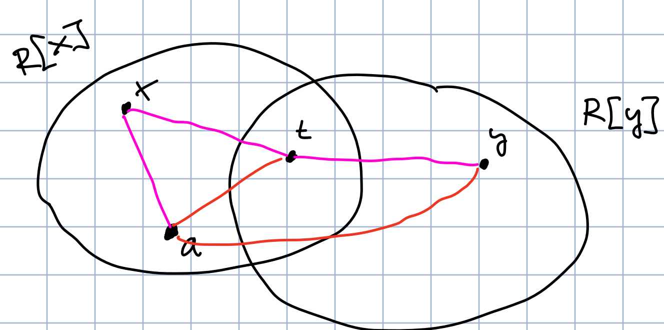
stačí

$R[x] \subseteq R[y]$

↳ pokud platí jedna inkluze můžu ze symetrie prohodit x a y → platí rovnost

chceme : $\forall a : a \in R[x] \Rightarrow a \in R[y]$

víme, že pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, tak $\exists t \in R[x] \cap R[y]$



$xRt \wedge xRa \Rightarrow aRt$

$aRt \wedge tRy \Rightarrow aRy$

✓

$a \in R[y]$

formálně :

víme : xRt protože $t \in R[x]$
yRt protože $t \in R[y]$
xRa protože $a \in R[x]$

zároveň aRx symetrie

tranzitivita : $aRx \wedge xRt \Rightarrow aRt$

symetrie : tRy

tranzitivita : $aRt \wedge tRy \Rightarrow aRy \xrightarrow{\text{symetrie}} yRa$

$\Rightarrow \quad a \in R[y]$

$\blacksquare$

množina jejíž prvky jsou množiny

DEF: <u>Množinový systém</u> $(X, \mathcal{Y})$ t.ž. $\mathcal{Y} \subseteq 2^X$

↳ podmnožina množiny všech podmnožin X

DEF: <u>Rozklad</u> $(X, \mathcal{Y})$:

1) $\forall A \in \mathcal{Y}: A \neq \emptyset$

2) $\forall A, B \in \mathcal{Y}: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

3) $\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A = X$

Rozklad je množinový systém, kde množiny jsou ekvivalenční třídy a sjednocením všech dostanu původní množinu

Rozklad a ekvivalence jsou dva různé pohledy na to stejné

(částečné uspořádání)

DEF: Relace R na X je <u>uspořádání</u>, pokud R je
- reflexivní xRx
- antisymetrická (slabě) $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
- tranzitivní $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

DEF: Prvky $x, y \in X$ jsou <u>porovnatelné</u> $\equiv$ $xRy \vee yRx$, kde R je relace uspořádání.

DEF: <u>Uspořádání je lineární</u> $\equiv$ každé dva prvky jsou porovnatelné

(X, R) je uspořádaná množina

Pro $(X, \leq)$ Č.U.M. (částečně uspořádaná množina) definujeme $<$ <u>ostré uspořádání</u>
$x<y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$

☺ $<$ je ireflexivní, antisymetrické, tranzitivní

Př Uspořádání
1) $(\mathbb{N}, \leq)$
2) $(\mathbb{Q}, \leq)$

$\Big\}$ lineární uspořádání

3) id_X ✓
4) $(\mathbb{N}^+, \backslash)$ dělitelnost ✓

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \backslash)$ NENÍ uspořádání $\rightsquigarrow 2 \backslash -2 \wedge -2 \backslash 2$

5) $(2^A, \subseteq)$ inkluze je uspořádání, ale není lineární

množina všech podmnožin

↳ nelze porovnat $\{1,3\}$ a $\{1,2\}$

6) Lexikografické uspořádání

Pro $(A, \le)$ lineárně uspořádanou množinu definujeme <u>lexikografické uspořádání</u>

$$(3,5) < (7,2)$$
$$(3,2) < (3,5)$$

- na A^2 : $(x,y) \le_{LEX} (x',y') \equiv x<x' \vee (x=x' \wedge y \le y')$
- na A^k : $(x_1, \dots x_k) \le_{LEX} (y_1, \dots y_k)$

$$\equiv (\exists h : (x_1, \dots x_{h-1}) = (y_1, \dots y_{h-1}) \wedge x_h < y_h)$$
$$\vee \quad (x_1, \dots x_k) = (y_1, \dots y_k)$$

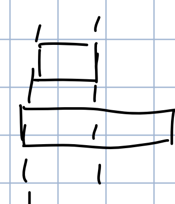
– lexikografické uspořádání je vždy lineární

Lexikografické uspořádání pro $\underbrace{\text{konečné posloupnosti}}_{A^*}$:

– pokud posloupnosti stejně dlouhé -> lexikografické uspořádání pro k-tice

$$(x_1, \dots x_a) \le_{LEX} (y_1, \dots y_b)$$

$m := \min(a,b)$ → minimum z délek posl.



$$\equiv \Big((x_1, \dots x_m) \le_{LEX} (y_1, \dots y_m)\Big) \vee \Big((x_1, \dots x_m) = (y_1, \dots y_m) \wedge a \le b\Big)$$

-> můžeme lexikograficky uspořádat komplexní čísla

Hasseovy diagramy

- nekreslíme orientaci hran -> to co je nahoře je větší než to, co je dole
- nekreslíme hrany, které by plynuly z tranzitivity
- hranu mezi dvěmi prvky natáhnu, když jeden je menší než druhý, ale žádný třetí se mezi ně nevejde

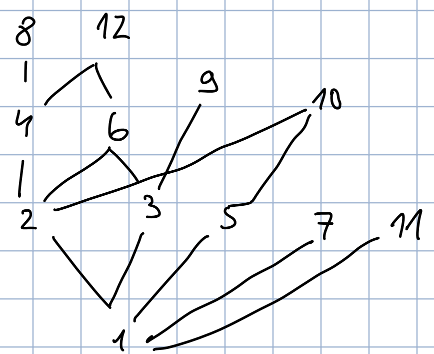
↳ relace bezprostředního předchůdce (ostré uspořádání, ale žádný další prvek se nevejde mezi)

DEF: Pro Č.U.M. $(X, \leq)$ definujme relaci $\lhd$ na X

↳ relaci bezprostředního předchůdce

$$x \lhd y \equiv x < y \land \nexists z : x < z < y$$

(PŘ) Hasseův diagram pro dělitelnost na $\{1, \dots, 12\}$



1 je nejmenší a minimální

7, 8, 9, 10, 11, 12 jsou maximální

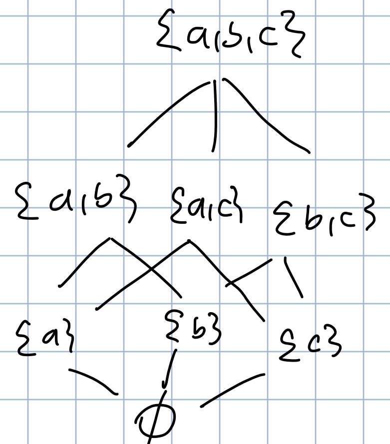
↳ nad nimi už nic není

-> ale nejsou mezi sebou porovnatelné

↳ není největší

Hasseův diagram pro inkluzi na podmnožinách tříprvkové množiny

↳ $2^{\{a,b,c\}}$



$\emptyset$ je nejmenší a minimální

$\{a,b,c\}$ je největší a maximální

V Č.U.M $(X, \le)$:

- $x \in X$ je nejmenší prvek $\equiv \forall y \in X : x \le y$
- $x \in X$ je minimální prvek $\equiv \nexists z : z < x$

analogicky největší a maximální

- nejmenší prvek může existovat nejvýše jeden
- když je prvek nejmenší $\Rightarrow$ je minimální

DEF: Opačné uspořádání $\le^{-1}$
↳ to co bylo předtím menší je teď větší a naopak

VĚTA: Každá konečná neprázdná ČUM $(X, \le)$ má minimální prvek.

Dk: Vezmeme libovolný prvek. Buď je minimální nebo není a tím pádem je jiný menší prvek → opakujeme dokud nenajdeme minimální
↳ konstrukce menších a menších prvků a ta konstrukce se musí zastavit
→ zastaví se jen u minimálním prvku

Vytváříme posloupnost $x_1, x_2, \dots$ tž:
- x_1 libovolný prvek X
- $\forall t$: pokud x_t není minimální, položíme $x_{t+1} < x_t$ →existuje menší

Pokud by posl. byla nekonečná, tak se v ní nějaký prvek musí zopakovat $\Rightarrow \exists i < j : x_i = x_j$

proto $x_i > x_{i+1} > x_{i+2} > \dots > x_j$

$\Rightarrow$ tranzitivitou $x_i > x_j$ SPOR ↯

$\blacksquare$

Dk: Alternativní

Pro $\forall x \in X$: $L_x := \{ y \in X \mid y \leq x \}$

$\uparrow$ dolní množina prvku x

$x \in L_x$ (reflexivita)

můžu říct, protože mám konečný počet prvků
↳ konečné množiny → konečně velké

Vezmeme x, jehož L_x má nejméně prvků.
Kdyby x nebylo minimální, pak L_x má alespoň 2 prvky
→ $\exists y \neq x$: $y \in L_x$

$L_y \subseteq L_x \setminus \{x\}$ $\downarrow$ $y \leq x$ dokážu sporem, že $L_y \subset L_x$ → má méně prvků ↳ spor! ↳ x minimální

$a \in L_y$: $a \leq y$ tranzitivita : $a \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow a \leq x$

$\downarrow$

↳ každý prvek z L_y je také v L_x $\Rightarrow$ $L_y \subseteq L_x$ ✓ $a \in L_x$

→ chci ukázat ostrou inkluzi mezi $L_y \subset L_x$ → platí proto
↳ x nemůže ležet v L_y

↳ kdyby $x \in L_y$, tak $x \leq y$ ale zároveň $y \leq x$
↳ porušili jsme antisymetrii

[redacted]

VĚTA: O lineárním rozšíření uspořádání (dokážeme jen pro konečné ČUM)

Pro $\forall (X, \sqsubseteq)$ konečnou ČUM : $\exists \leq$ lineární uspořádání na X, tž:

$$\sqsubseteq \; \subset \; \leq$$

„Na konečné množině jde každé částečné uspořádání rozšířit na lineární"

Dk: Indukcí podle počtu prvků X, m → $m := |X|$

- $m = 0$ → prázdná množina ✓
  ↳ tam existuje jen prázdné uspořádání → to je lineární

- $m-1 \to m$ (aby m byl počet prvků aktuální množiny)

  $a :=$ minimální prvek X
  toto a odtrhneme od X, použijeme na zbytek X a jejich uspořádání IP
  ↳ z IP dostaneme, že se to dá lineárně rozšířit
  a pak před všechny prvky do toho uspořádání přidáme minimální prvek a, tak aby byl menší rovno všem ostatním
  ↳ zase lineární uspořádání

$X' := X \setminus \{a\}$, $\preceq' := \preceq \cap (X')^2$
↳ z relace jsme odřízli dvojice, kterých se se účastní prvek a

↳ $(X', \preceq')$ je zase ČUM

$\xrightarrow{IP}$ $\exists \leq'$ lineární uspořádání na X'

$\leq : \leq' \cup \{(a,b) \mid b \in X\}$
↳ doplníme dvojice, kterých se zúčastní a, které jsme vyřízli předtím

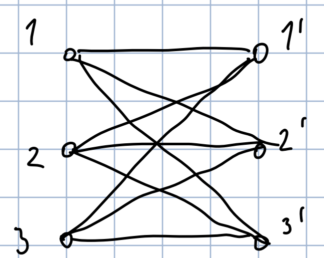
Izomorfismus

DEF: Grafy $G=(V,E)$ a $G'=(V',E')$ jsou <u>izomorfní</u> $(G \cong G') \equiv$

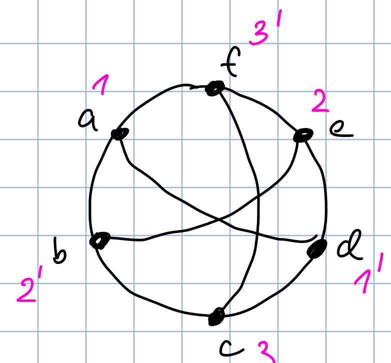
$\exists f: V \to V'$ bijekce t.ž.: $\forall a,b \in V: \{a,b\} \in E \iff \{f(a), f(b)\} \in E'$

↳ bijekce mezi množinami vrcholů, která zachovává vlastnost, být spojen hranou

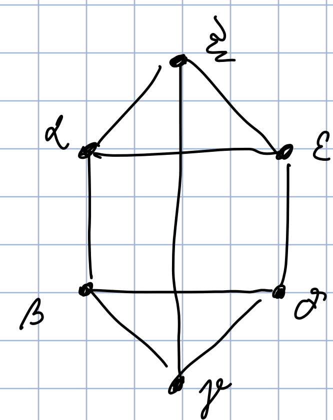
Př



G



H



L

$G \cong H$

$G \ncong K_5$? → může platit? → NE → jiný počet vrcholů
↳ neexistuje bijekce

$G \ncong K_6$? → NE → musí se zachovávat stupně

↑ 3 regulární ↑ 6 regulární

$H \ncong L$ → G je bipartitní, L obsahuje Δ
↳ nemůže být bipartitní

- to, že 2 grafy jsou izomorfní znamená, že mají stejné vlastnosti, k jejichž definici jsme nepotřebovali konkrétní jména vrcholů

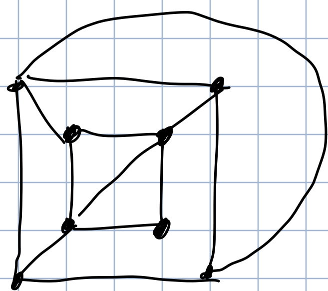
- izomorfismus můžeme definovat i pro orientované grafy → v definici budou uspořádané dvojice

Pro ČUM: $(X, \le) \cong (X', \le') \equiv \exists f: X \to X'$ bijekce t. ž.:
$\forall a,b \in X: \ a \le b \iff f(a) \le' f(b)$

(Př) ČUM $(\{1,2,3\}, \le) \cong (\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}, \subseteq)$

$\emptyset$ ~ 1, $\{a\}$ ~ 2, $\{a,b\}$ ~ 3

Rovinné grafy



DEF: Rovinné nakreslení grafu

vrcholy → různé body v $\mathbb{R}^2$
hrany → oblouky v $\mathbb{R}^2$ (oblouky spojují body)
(spojitá prostá fce $\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$)

Navíc pokud dva různé oblouky mají společný bod, tento bod je nakreslením společného vrcholu jejich hran
↳ zakazuje křížení dvou hran 
↳ zakazuje aby na oblouku ležel krajní vrchol jiného oblouku 

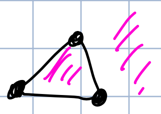
a současně nakreslení $(v) \in$ nakreslení $(e) \Rightarrow v \in e$
↳ aby nemohl volný vrchol ležet na hraně

DEF: Graf je rovinný ≡ má alespoň 1 rovinné nakreslení.

DEF: Topologický rovinný graf ≡ graf + rovinné nakreslení

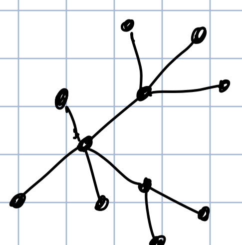
- cesta -> oblouk
- kružnice -> topologická kružnice (jednoduchá uzavřená spojitá křivka)

stěny nakreslení - ty oblouky kterými je nakreslení tvořeno dělí rovinu na nějaké oblasti, části -> stěny nakreslení

Př  má 2 stěny -> vnitřní a vnější
↳ zbytek roviny

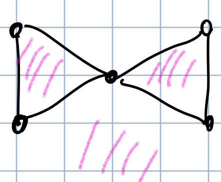
• trojúhelník

• strom -> má jednu stěnu

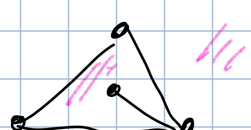


- každý strom je rovinný graf, protože každý strom jde tvořit postupným přilepováním listů -> zachování rovinnosti přilepováním listů

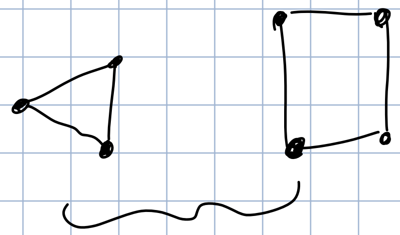
• motýlek -> 3 stěny



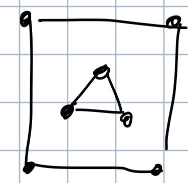
• trojúhelník s ocáskem -> 2 stěny



• nesouvislý graf

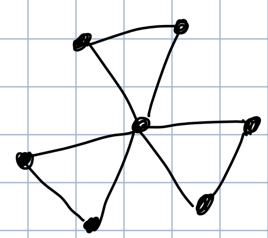


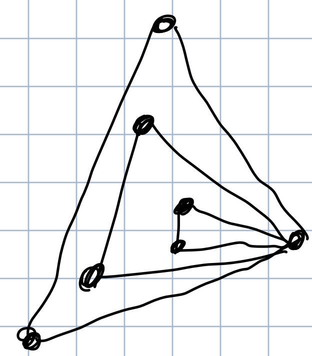
tohle nakreslení
3 stěny



jiné nakreslení stejného grafu
3 stěny

• větrný mlýn





↳ 2 jiné nakreslení stejného grafu
- zásadně jiná struktura

① Nakreslení stromu má jednu stěnu.

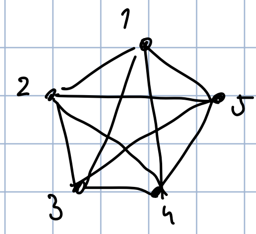
② Nakreslení lesa má jednu stěnu.

③ Pokud graf není les, tak má alespoň 2 stěny
↳ obsahuje cyklus -> což nakreslení cyklu je topologická kružnice
=> v nakreslení je uzavřená křivka rozdělující rovinu na 2 části, které nemohou být v jedné stěně

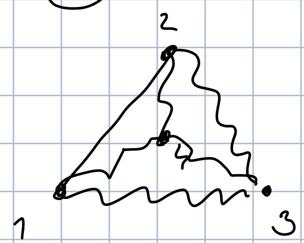
Hranice stěny ~ uzavřený sled

Jordanova věta: Každá jednoduchá uzavřená křivka v rovině dělí rovinu na dvě oblasti
- omezenou vnitřní
- neomezenou vnější

Lemma: K_5 není rovinný



Dk



↳ Podle Jordanovy věty tato kružnice dělí rovinu na 2 oblasti

→ 4 musí být v jedné ze dvou oblastí

– 4 je uvnitř

– 5 je – venku → nejde spojit 5 s 4 aniž bychom neprotnuli topologickou kružnici 123

↳ nejde

– do stěny 124 → zase nejde spojit s 3

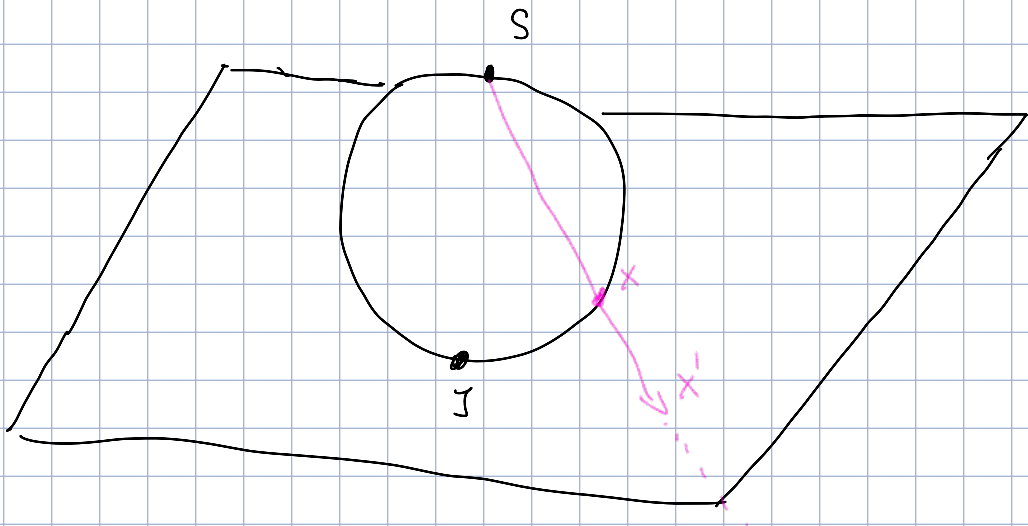
↳ nejde

– podobně vyloučíme všechny stěny nakreslení

– 4 je venku → to stejné „naruby“ → zas nebude kam dát 5

■

Stereografická projekce



DEF: Stereografická projekce je spojitá bijekce mezi $\mathbb{R}^2$ a sférou bez bodu.

Důsledky:

① G je rovinný $\Leftrightarrow$ G se dá nakreslit na sféru

② Můžeme zvolit, která stěna je vnější
↳ jakékoliv nakreslení můžu stereograficky projektovat na sféru
↳ můžu otočit tak, aby libovolná stěna obsahovala severní pól
↳ stěna obsahující severní pól je vnější

- na torus se dá nakreslit K_5
- na Möbiovu pásku K_6

VĚTA: Eulerova formule:

Pro souvislý graf nakreslený do roviny platí:

$$\underbrace{v}_{\#\text{vrcholů}} + \underbrace{f}_{\#\text{stěn}} = \underbrace{e}_{\#\text{hran}} + 2$$

→ počet stěn je jednoznačně určen počtem vrcholů a počtem hran

Dk nejprve zafixujeme počet vrcholů a pak budu indukovat podle počtu hran:

Buď v pevné, indukci podle e.

① $e = v-1$ ... strom (každý souvislý graf má kostru → strom)
$f = 1$

$$v+1 = v-1+2 \quad \checkmark$$

② $e-1 \to e$

graf G obsahuje kružnici C

$h \in E(C)$ (každá hrana na kružnici odděluje dvě stěny)

$G' := G - h$ → ubrali jsme hranu → ubrali jsme stěnu

↳ G' má o hranu méně a stejný počet vrcholů

$v' = v$

$e' = e - 1$

$f' = f - 1$

použijeme IP na G' → $v' + f' = e' + 2$

$$v + f - 1 = e - 1 + 2$$

$$v + f = e + 2$$

$\blacksquare$

DEF: Graf $G = (V, E)$ je <u>maximální rovinný</u> $\equiv$ G je rovinný $\land$ $\forall e \in \binom{V}{2} \setminus E$: $G + e$ není rovinný

↳ hranu která spojuje vrcholy tohoto grafu a ještě v grafu není

musíme mluvit o konkrétním nakreslení

LEMMA: Maximální topologický rovinný graf s alespoň 3 vrcholy je triangulace

↳ všechny stěny jsou trojúhelníky

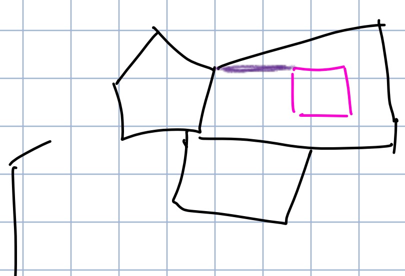
Dk idea: dokud tam jsou nějaké stěny které nejsou Δ, můžeme přidávat hrany

1) nejprve ukážeme, že graf je souvislý

co kdyby ne → chceme ukázat, že nesouvislý graf není maximální

má alespoň 2 komponenty

↳ jednu můžu zakreslit do 2. a natáhnout mezi ně hranu → není maximální



pokud všechny komponenty mají jen jednu stěnu, tak ten graf je les

→ les s alespoň 2 stromy

a propojením libovolných 2 stromů hranou vznikne zase les ⇒ rovinný
↳ předchozí les nebyl maximální

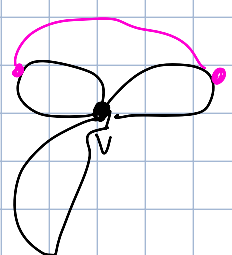
2) je-li hranicí stěny kružnice, pak je to △
↳ kdyby ne, tak:

→ na kružnici najdu 2 vrcholy nespojené hranou a tyto dva vrcholy můžu spojit vnitřkem kružnice

3) nestane se, že by hranice stěny nebyla kružnice

vím, že hranicí stěny je uzavřený sled
kdyby to nebyla kružnice, tak se na něm nějaký vrchol opakuje

Nechť v opakující se vrchol



sled rozdělíme do podsledů
na každém podsledu existuje aspoň jeden další vrchol
↳ propojím dva vrcholy na dvou podsledech
→ zase jsem přidala hranu

∎

- pro triangulace:

$$3f = 2e$$

$$f = \frac{2}{3}e$$

↳ dosadíme do eulerovy f. : $v + \frac{2}{3}e = e + 2$

$$v - 2 = \frac{1}{3}e$$

$$3v-6=e$$

→ každá triangulace o na v vrcholech má $(3v-6)$ hran.

↗ Dk

LEMMA: Triangulace na v vrcholech má $(3v-6)$ hran

VĚTA: Rovinný graf na v vrcholech má nejvýše $3v-6$ hran, kde $v \geq 3$.

Dk

Graf G doplníme hranami na G' maximální rovinný.

$v' = v$, $e' \geq e$

Pro G', který je triangulace, platí: $e' = 3v' - 6 = 3v - 6$

a $e \leq e'$

$\rightarrow$ $e \leq 3v-6$

∎

Důsledek: K_5 není rovinný graf

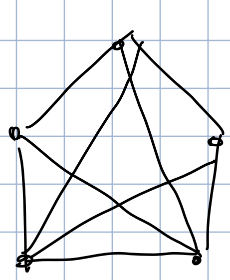
K_5: $v=5$, $e = \binom{5}{2} = 10$

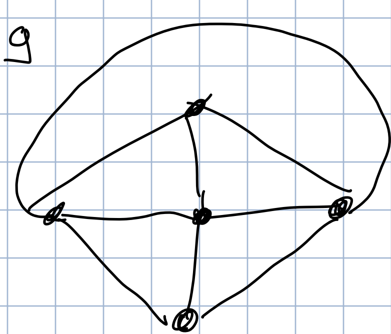
$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ což neplatí!

$\Rightarrow$ K_5 není rovinná

Př Je K_5 s odebráním jedné hrany rovinný? ANO

$v=5$, $e=9$





↳ K_5 je minimální nerovinný graf

věty $e \leq 3v - 6$

Důsledky:

① Průměrný stupeň:

$$\frac{\sum_u \deg(u)}{v} = \frac{2e}{v} \leq \frac{6v - 12}{v} = 6 - \frac{12}{v} < 6$$

průměrný stupeň vrcholu je ostře menší než 6
↳ platí i pro grafy na jednom i dvou vrcholech

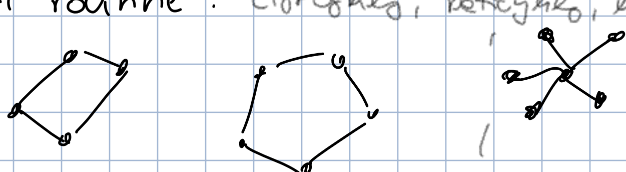
↳ minimum ze stupňů je ostře menší než 6
↳ je nejvýš 5

→ v každém rovinném grafu existuje vrchol, jehož stupeň je ≤ 5

② Existuje vrchol stupně ≤ 5

Grafy bez Δ

maximální rovinné: čtyřcyklo, pětcyklo, hvězdice



$$4f \leq 2e$$

$$f \leq \frac{1}{2}e$$

Eulerova f.: $v + \frac{1}{2}e \geq e + 2$

$$e \leq 2v - 4$$

$K_{3,3}$ není rovinný

$v = 6 \quad e = 9$ bipartitní → nejsou Δ

ale neplatí $e \leq 2v - 4$ ⇒ není rovinný

↳ $K_{3,3}$ je minimální nerovinný graf

Grafy bez Δ:

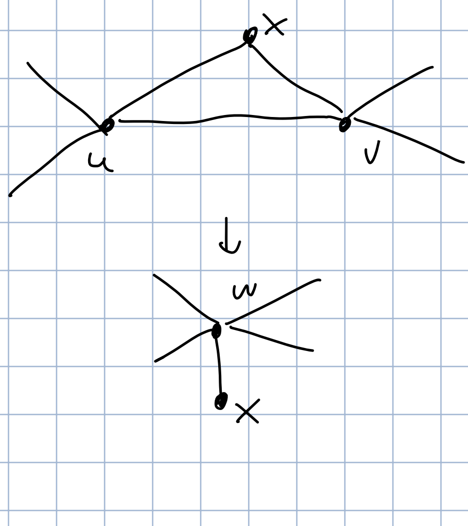
(1) průměrný stupeň < 4 → (2) existuje vrchol se stupněm nejvýše 3

Operace s grafy zachovávající rovinnost:

- Dělení hrany $G \% e$, $e = \{u, v\}$

$V' = V \cup \{w\}$, $E' = E \setminus \{u,v\} \cup \{\{u,w\}, \{w,v\}\}$

- Kontrakce hrany $G . e$

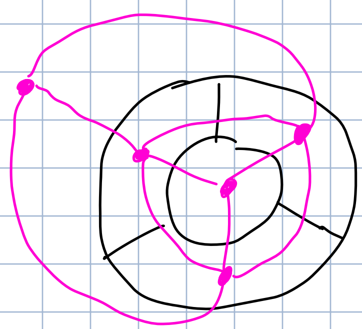


odstraní hranu a slepí vrcholy k sobě
↳ bude už jen jeden vrchol

- K_5, $K_{3,3}$ nejsou rovinné

VĚTA: Kuratowského : (bez důkazu)

G není rovinný $\iff$ G má podgraf izomorfní s nějakým dělením K_5 nebo $K_{3,3}$



Nakreslení grafu G

Duální graf G^*

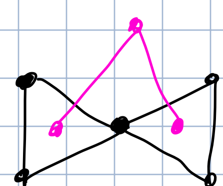
- Problém 4 barev

DEF: Pro topologický rovinný graf G definujeme duální graf G:

$V(G^*) :=$ stěny nakreslení G

$\{s,t\} \in E(G^*) \equiv$ stěny s, t mají společnou hranu $(s \neq t)$

Pf

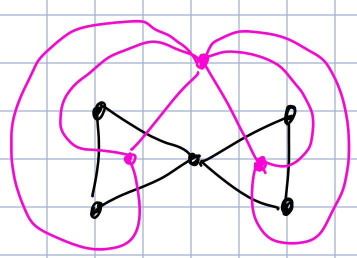


DEF: Pro topologický rovinný multigraf G definujeme duální multigraf G^*:

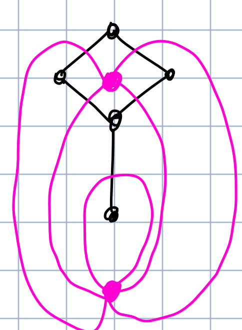
$V(G^*) :=$ stěny nakreslení G

$E(G^*) :=$ za každou hranu $\{u,v\} \in E(G)$ oddělující stěny s,t přidáme hranu $\{s,t\}$

Př



Př



- pro souvislé grafy platí, že duál duálu je izomorfní s původním grafem
- dualita nám prohazuje vrcholy a stěny, počet hran zachovala

DEF: Obarvení grafu G k barvami:

$$c : V(G) \to \{1, \dots k\} \quad \text{tž:}$$

$$\forall u,v \in V(G) : \{u,v\} \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

↳ Jakkoliv u,v spojené hranou, tak mají různé barvy
↳ pro každou hranu platí, že její dva koncové vrcholy mají různou barvu

DEF: Graf je k-obarvitelný $\equiv$ $\exists c$ obarvení k barvami

DEF: Barevnost grafu G (chromatické číslo)

$$\chi(G) := \min\{k \mid G \text{ je } k\text{-obarvitelný}\}$$

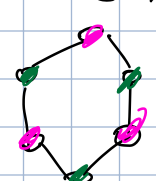
$\chi(G) \leq |V(G)|$

↑ chromatické číslo ↳ počet vrcholů

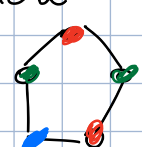
PF

- $\chi(E_n) = 1$ → jediné grafy mající barevnost 1
  ↑ graf bez hran
- $\chi(P_n) = 2$, $n \geq 1$

- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \dots n \text{ sudé} \\ 3 & \dots n \text{ liché} \end{cases}$



↳ 2 barvy



↳ 3 → střídám a poslední vrchol 3. barva

Pokud $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$

Proto obsahuje-li G lichou kružnici, tak má barevnost aspoň 3.

LEMMA: Barevnost stromu s alespoň jednou hranou je dva.

"Dk" Zvolíme si kořen stromu, vrchol, který obarvíme 1. barvou
Jeho sousedy obarvíme 2. barvou.
Ještě neobarvené sousedy sousedů obarvíme 1. barvou.
atd.

↳ barva určitého vrcholu je určená tím, jestli vzdálenost od kořene je sudá nebo lichá

↳ mezi každými dvěma vrcholy ve stromě vede cesta
↳ sudý/lichý počet hran cesty určuje barvu

LEMMA: G je 2-obarvitelný $\Leftrightarrow$ G je bipartitní

Dk: ($\Leftarrow$) Graf je bipartitní → vrcholy lze rozdělit do dvou partit
→ každou partitu obarvíme jednou barvou
↳ G je 2-obarvitelný

($\Rightarrow$) Mám obarvení grafu 2 barvami, podle toho stanovím partity grafu
↳ do jedné partity vrcholy jedné barvy, do druhé partity vrcholy druhé barvy
→ hrany vedou jen mezi partitami
↳ bipartitní

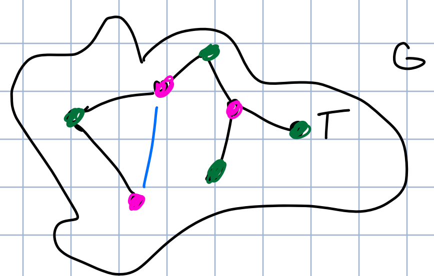
VĚTA: G je 2-obarvitelný $\iff$ v G není lichá kružnice

Dk: $(\Rightarrow)$ obměněná imp: v G je lichá kružnice $\Rightarrow$ G není 2-obarvitelný
→ triviálně platí

$(\Leftarrow)$

Mějme G bez lichých kružnic. BÚNO G je souvislý.
Souvislý graf má kostru.
$T :=$ kostra grafu G, kostra je strom
stromy jsou 2-obarvitelné
tzn, že $\exists\, c$ 2-obarvení kostry T.

Ukážeme, že c je 2-obarvením celého G.



Teď máme hranu v G, která v kostře není.
→ hrana spojuje
- dva různobarevné vrcholy ✓
- dva stejnobarevné vrcholy → problém

Uvažme cestu v kostře mezi těmito dvěma stejnobarevnými vrcholy

Na té cestě se pravidelně střídají barvy
→ koncové vrcholy stejnou barvu
→ cesta sudé délky
a když k cestě sudé délky přidáme naši problematickou hranu, tak máme lichou kružnici

Teď formálně:

Kdyby pro $\{u,v\} \in E(G) \setminus \{T\}$ bylo $c(u) = c(v)$, pak cesta C v T mezi u,v má sudý počet hran (pravidelné střídání barev)
$\Rightarrow$ $C + \{u,v\}$ je lichá kružnice $\lightning$ $\blacksquare$

→ grafy s nízkými stupni mají nízkou barevnost

- pro G rovinný : $\chi(G) \leq 6$

  ↳ v každém rovinném grafu je vrchol stupně nejvýše 5
  volíme $l :=$ vrchol se stupněm ≤ 5
  → mám 6 barviček → vrchol vracím zpátky → alespoň 1 barva je pro něj volná

VĚTA: O 5 barvách:

Pro G rovinný platí : $\chi(G) \leq 5$
↳ každý rovinný graf je 5-obarvitelný

Dk indukcí podle $n :=$ počet vrcholů

- $n \leq 5$ ✓
- $n \to n+1$: Mějme G rovinné na $n+1$ vrcholech.
  v vrchol v G stupně ≤ 5
  $G' := G - v$, rovinný (je to podgraf G) na n vrcholech
  ⟹ IP :
  $\exists c'$: 5-obarvení G'

  chceme z c' vytvořit c : 5-obarvení G
  podíváme se na sousedy v a jaké barvy jim přiřadilo obarvení c' :
  [sousedi jsou nejvýše 4 → zbývá barva pro v ✓
  [sousedů je 5, ale nějací dva dostali stejnou barvu → zase zbývá barva pro v ✓
  ↳ tzn., že mají-li sousedi v nejvýše 4 barvy → zbyla barva pro v

  - problematické : v má právě 5 sousedů a všichni dostali různé barvy
    sousedi : a, b, c, d, e

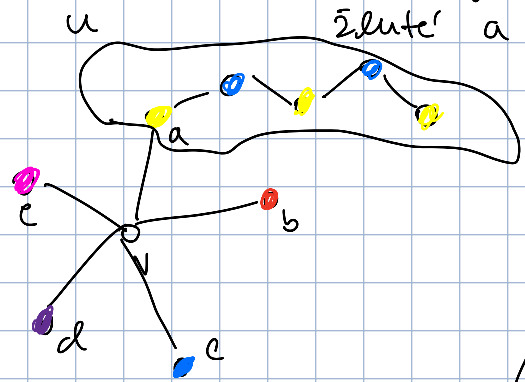
  - budeme se snažit najít přebarvení a, b, c, d, e tak, aby to vyhovovalo i zbytku grafu a dva sousedé měli stejnou barvu → zbyla barva pro v :

Vezměme konkrétní nakreslení G a podívejme se, jak jde pořadí sousedů a vezměme nějaké nesousední vrcholy a začneme konstruovat podgraf dosažitelný z

↳ třeba a, c

a přes vrcholy těch barev a a c

↳ konstruuju podgraf u, kam se dostanu z a použitím žluté a modré (barev a a c)



rozlišíme 2 případy:

- v u leží c
- v u neleží, tak můžeme v podgrafu prohodit žlutou a modrou a nic se tím nezmění
  ↳ tím pádem z žlutého a se stane modré a a zbývá žlutá pro v

udělám stejnou úvahu pro b a d

↳ už se nemůže stát, že by červeno-fialový podgraf vedoucí z b dospěl až k d

→ když se to předtím nepovedlo → mezi a a c vede cesta obsahující jen žlutou a modrou barvu, která spolu s v uzavírá kružnici

→ kružnice která je kromě v jen žlutá a modrá

⇒ b je uvnitř kružnice d je venku

→ jejich červeno fialová cesta by někde musela překřížit žluto modrou hranici → nějaký vrchol na hranici je současně žlutý/modrý a červený/fialový

což NEJDE

↳ s b a d se to povést musí

■

Platónská tělesa

- pravidelné konvexní mnohostěny v $\mathbb{R}^3$
  ↳ všechny strany pravidelné s-úhelníky pro nějaké s
- v každém vrcholu se potkává stejný počet k hran.

vrcholů : v
hran : e
stěn : f

chci z mnohostěnu udělat rovinný graf :
- opíšu mnohostěnu sféru, tak, aby střed koule ležel uvnitř mnohostěnu
- ze středu budu promítat mnohostěn na sféru

↳ mnohostěn je konvexní → průměty hran se nebudou křížit
→ graf nakreslený do roviny

tato projekce z vrcholů mnohostěnu udělá vrcholy grafu
a z hran mnohostěnu udělá hrany grafu
ze stěn mnohostěnu udělá stěny nakreslení

⇒ v, e, f jsou i parametry rovinného grafu
graf bude k-regulární a každá stěna bude mít s hran

↳ až na izomorfismus je takových grafů jen 5

$$3 \leq k \leq 5$$

- v každém rovinném grafu je vrchol stupně nejvýše 5
  ↳ graf je k-regulární → $k \leq 5$
- graf vznikl z mnohostěnu → v grafu se potkávají alespoň 3 hrany → $3 \leq k$

uvážíme duál grafu → v něm se prohodí vrcholy a stěny

↳ $3 \leq s \leq 5$ ↳ duál je s-regulární

Teď šikovně dosadíme do Eulerovy formule
pomocí počtu hran a vrcholové a stěnové regularity (e, k, s)
chceme vyjádřit zbytek

z regularity G : $2e = v \cdot k$ (počet hran je součet stupňů)

z regularity G' : $2e = f \cdot s$

tzn, že

$$v = \frac{2e}{k} \quad , \quad f = \frac{2e}{s}$$

pro dané e, k, s umíme vyjádřit v, f
dosadíme do Eulerovy formule:

$$v + f = e + 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2e}{k} + \frac{2e}{s} = e + 2 \quad / : 2e$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\frac{1}{e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2}}$$

k, s, e celá č.
, e je kladné
$3 \le k, s \le 5$

$k = 3 \vee s = 3$, aby platila rce

pro $k, s \geq 4$: $\frac{1}{k} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \le 0$ → což nejde

→ to nám dává 5 možností a každá možnost nám jednoznačně určí graf

k	s	e	v	f	
3	3	6	4	4	→ čtyřstěn
3	4	12	8	6	→ krychle (šestistěn)
3	5	30	20	12	⋮
4	3	12	6	8	⋮
5	3	30	12	20	dualita